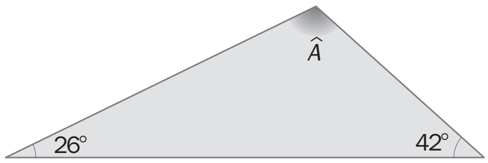
EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ángulos y triángulos

8.26 Halla la medida del ángulo $\widehat{A}$ en el siguiente triángulo.



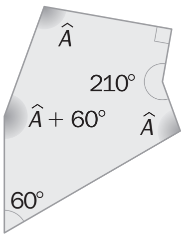
$$180° = 26° + \widehat{A} + 42° \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 26° - 42° = 112°$$

8.27 Calcula la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

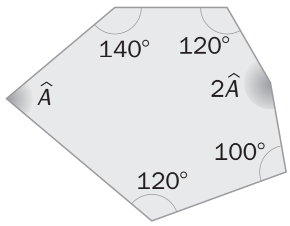
El pentágono tiene 5 lados; así, la suma de sus ángulos interiores es de $180° \cdot (5 - 2) = 540°$.

8.28 ¿Cuánto miden los ángulos designados por letras en estas figuras?

a)



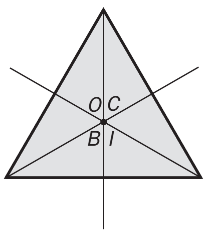
b)



a) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 90° + 210° + \widehat{A} + 60° + (\widehat{A} + 60°) \Rightarrow 3\widehat{A} = 300° \Rightarrow \widehat{A} = 100°$

b) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 140° + 120° + 2\widehat{A} + 100° + 120° \Rightarrow 3\widehat{A} = 240° \Rightarrow \widehat{A} = 80°$

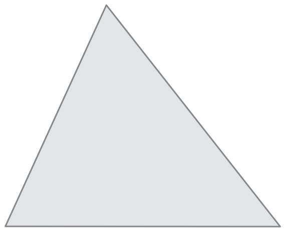
8.29 Dibuja un triángulo equilátero y traza sus mediatrices, medianas, bisectrices y alturas. Explica qué observas.



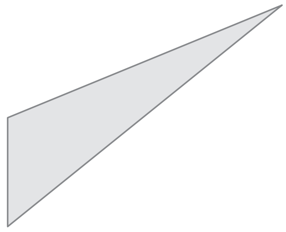
Que todas se cortan en el mismo punto.

8.30 Traza la circunferencia inscrita y la circunscrita de los siguientes triángulos.

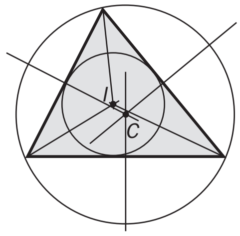
a)



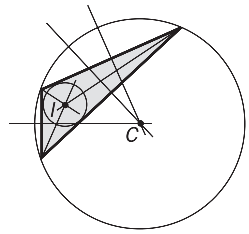
b)



a)



b)



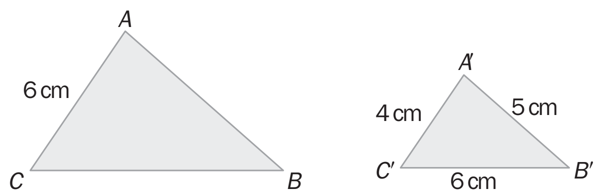
Figuras semejantes. Teorema de Tales

8.31 Los lados de un triángulo miden, respectivamente, 10, 12 y 14 centímetros. Los de otro triángulo miden 15, 18 y 21 centímetros. ¿Son semejantes?

$$\frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = 1{,}5$$

Son semejantes, puesto que los lados son proporcionales.

8.32 Los triángulos de la figura son semejantes. Calcula el valor de *AB* y *BC*.

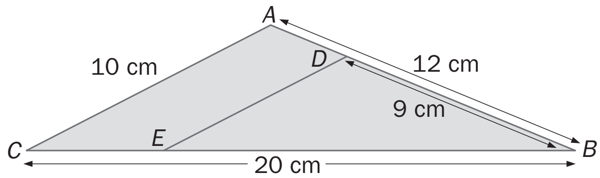


$$\frac{6}{4} = \frac{AB}{5} = \frac{BC}{6} \Rightarrow AB = 7{,}5 \text{ cm y } BC = 9 \text{ cm}$$

8.33 Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 9 centímetros. El lado menor de otro triángulo semejante al dado mide 20 centímetros. Halla la medida de los otros lados.

$$\frac{20}{5} = \frac{a}{6} = \frac{b}{9} \Rightarrow a = 24 \text{ cm y } b = 36 \text{ cm}$$

8.34 Calcula la medida de $\overline{DE}$ y $\overline{CE}$.



$$\frac{12}{9} = \frac{10}{\overline{DE}} \Rightarrow \overline{DE} = 7{,}5 \text{ cm}$$

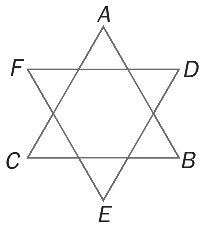
$$\frac{12}{3} = \frac{20}{\overline{CE}} \Rightarrow \overline{CE} = 5 \text{ cm}$$

8.35 Los lados de un triángulo miden 9, 12 y 16 centímetros. Calcula las longitudes de los lados de otro triángulo semejante al dado, tal que su perímetro es 148 centímetros.

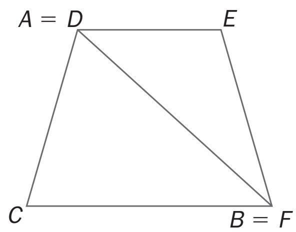
$$\frac{148}{9 + 12 + 16} = \frac{a}{9} = \frac{b}{12} = \frac{c}{16} \Rightarrow a = 36 \text{ cm},\ b = 48 \text{ cm},\ c = 64 \text{ cm}$$

8.36 Razona, utilizando algún criterio de semejanza de triángulos, si los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes.

a)



b)



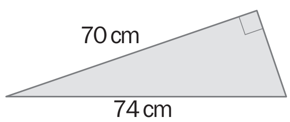
a) Son semejantes porque ambos son equiláteros.

b) El lado común de los dos triángulos es, obviamente, de la misma longitud en ambos, y también son de igual longitud los lados que se corresponden con los lados iguales del trapecio isósceles. La razón de proporcionalidad de los lados sería 1, pero los terceros lados, que son cada una de las bases del trapecio, no conservan esa razón de proporcionalidad. Por tanto, los triángulos no son semejantes.

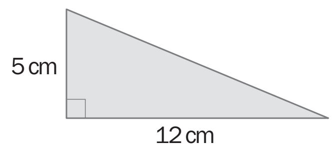
Teorema de Pitágoras

8.37 Averigua el valor del lado desconocido de estos triángulos.

a)



b)



a) $l^2 = 74^2 - 70^2 = 576 \Rightarrow l = 24$ cm

b) $l^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow l = 13$ cm

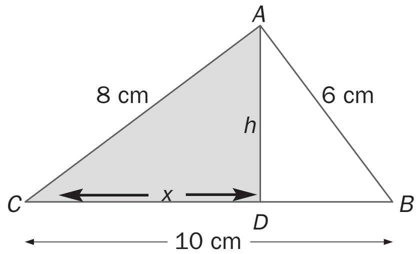
8.38 Determina la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12 centímetros.

Si llamamos h a la altura del triángulo, tendremos

$12^2 = h^2 + 6^2$

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h = 10{,}39$ cm

8.39 Calcula el área del triángulo rectángulo sombreado.



Los triángulos ABC y DAC son semejantes, luego

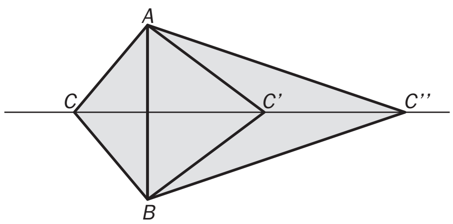
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{10}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 6{,}4 \text{ cm} \Rightarrow h^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04 \text{ cm} \Rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

Por tanto, el área será

$$A = \frac{6{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = 15{,}36 \text{ cm}^2$$

Lugar geométrico

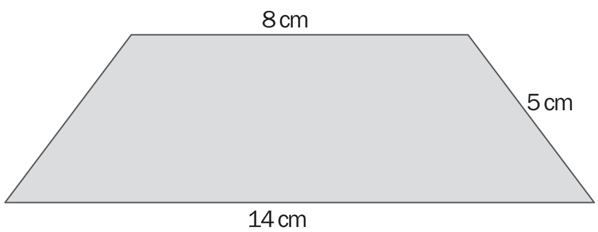
8.40 Construye varios triángulos isósceles cuyo lado desigual sea un segmento *AB* dado y nombra con la letra *C* al tercer vértice de dichos triángulos. ¿Cuál es el lugar geométrico que forman los puntos?



El lugar geométrico que forman los puntos C es la recta mediatriz del segmento AB.

Longitudes y áreas

8.41 Halla el área del trapecio isósceles de la figura.

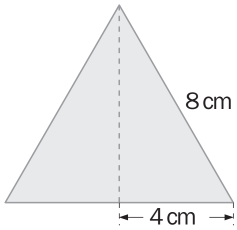


Usando el teorema de Pitágoras calculamos la altura: $h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$ cm

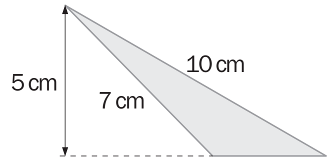
$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h = \left(\frac{14 + 8}{2}\right) \cdot 4 = 44 \text{ cm}^2$$

8.42 Calcula el área de estos triángulos.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la altura: $h^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow h = 6{,}93$ cm

$$A = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

b) Por Pitágoras calculamos la medida de la base del triángulo rectángulo de hipotenusa 10 y altura 5 y también la base del triángulo rectángulo de la misma altura y de hipotenusa 7. Restándolas tenemos la medida de la base del triángulo dado.

$b_1^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow b_1 = 8{,}66$ cm

$b_2^2 = 7^2 - 5^2 \Rightarrow b_2 = 4{,}90$ cm

$b = 8{,}66 - 4{,}90 = 3{,}76 \text{ cm} \Rightarrow A = \dfrac{3{,}76 \cdot 5}{2} = 9{,}4 \text{ cm}^2$

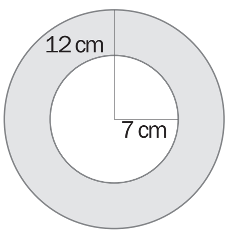
8.43 ¿Cuánto mide el área de un círculo de 20 centímetros de diámetro?

El radio es entonces de 10 centímetros de longitud, luego

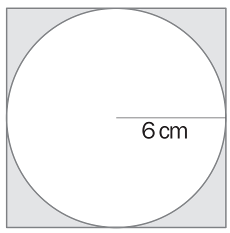
$$A = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$$

8.44 Determina el área de las regiones sombreadas.

a)



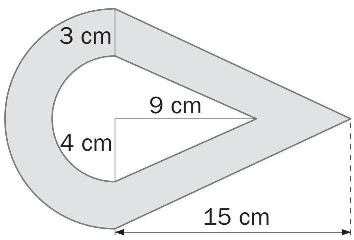
b)



a) $A = \pi(12^2 - 7^2) = 95\pi = 298{,}45 \text{ cm}^2$

b) $A = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 144 - 113{,}10 = 30{,}9 \text{ cm}^2$

8.45 Halla el área de la región sombreada de la figura.

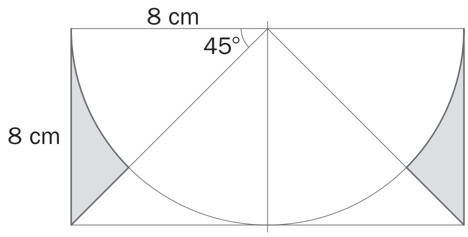


Por un lado, la media corona circular: $\dfrac{\pi(7^2 - 4^2)}{2} = 51{,}84 \text{ cm}^2$

Por otro lado, la zona entre los dos triángulos: $\dfrac{14 \cdot 15}{2} - \dfrac{8 \cdot 9}{2} = 105 - 36 = 69 \text{ cm}^2$

$$A = 51{,}84 + 69 = 120{,}84 \text{ cm}^2$$

8.46 Calcula el área de la región sombreada.



La figura es simétrica, basta con que se calcule el área de una parte y se multiplique por dos para tener el área de la región sombreada.

La parte sombreada es la mitad del área que queda después de restarle al área del cuadrado el área del sector circular de 90°, o lo que es lo mismo, una cuarta parte de la circunferencia.

$$A = 2 \cdot \left(\frac{8^2 - \frac{1}{4}\pi 8^2}{2} \right) = 13{,}74 \text{ cm}^2$$

8.47 El perímetro de un rombo es 40 centímetros y su diagonal mayor mide 16 centímetros. Averigua su área.

El rombo tiene todos sus lados iguales, cada uno de ellos medirá 10 cm. Usando el teorema de Pitágoras averiguamos la medida de la diagonal menor; para ello, el triángulo rectángulo que usamos es el formado por un lado del rombo y la mitad de cada una de las diagonales.

$c^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow c = 6 \text{ cm} \Rightarrow d = 12 \text{ cm}$

$A = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

8.48 Calcula la longitud del arco de circunferencia y el área del sector circular cuyo radio es 6 decímetros y cuyo ángulo mide 160°.

$L = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 160}{360} = 16{,}76 \text{ dm}$

$A = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 160}{360} = 50{,}27 \text{ dm}^2$

8.49 Halla el área de un hexágono regular de 12 centímetros de lado.

Por ser un hexágono regular, los triángulos que se forman al unir dos vértices consecutivos con el centro son equiláteros, y podemos calcular su altura, que coincide con la apotema.

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h \equiv a = 10{,}39 \text{ cm}$

$A = \dfrac{(12 \cdot 6) \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$