EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1 Halla el valor numérico de la fracción $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 8}$ para los valores 2, 0 y 4.

Para 2: $\dfrac{2^2 - 7 \cdot 2 + 10}{2^2 - 6 \cdot 2 + 8} = \dfrac{0}{0}$. Valor indeterminado.

Para 0: $\dfrac{0^2 - 7 \cdot 0 + 10}{0^2 - 6 \cdot 0 + 8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

Para 4: $\dfrac{4^2 - 7 \cdot 4 + 10}{4^2 - 6 \cdot 4 + 8} = \dfrac{-2}{0}$. No existe valor numérico.

6.2 Indica si estas fracciones tienen valor numérico para los valores que anulan el denominador.

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

a) El denominador se anula para $x = 4$. Para este valor, el numerador vale $4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$. No existe valor numérico para $x = 4$.

b) El denominador se anula para $x = 3$. Para este valor, el numerador vale $3^2 - 9 = 0$. Así que el valor de la fracción algebraica para $x = 3$ es indeterminado.

6.3 Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones: $\dfrac{x + 1}{x}$ y $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$.

Dos fracciones son equivalentes si el producto de medios es igual al producto de extremos. De modo que se tiene que cumplir que $(x + 1)(x^2 - x) = x(x^2 - 1)$.

$(x + 1)(x^2 - x) = x^3 - x^2 + x^2 - x = x^3 - x$

$x(x^2 - 1) = x^3 - x$

Las fracciones dadas son equivalentes.

6.4 Escribe tres fracciones equivalentes a $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$.

$\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)}$ es equivalente a $\dfrac{1}{x - 1}, \dfrac{x}{x^2 - x}, \dfrac{x + 3}{(x - 1)(x + 3)}$

6.5 Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15}$

a) $\dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 1} = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) Factorizando cada una de sus partes tenemos que $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15} = \dfrac{(x - 1)(x - 5)}{(x - 3)(x - 5)} = \dfrac{x - 1}{x - 3}$.

6.6 Simplifica $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ y calcula el valor numérico para $x = 2$.

Factorizamos numerador y denominador: $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Si $x = 2$, $\frac{2^2 + 2 + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$

6.7 Opera estas fracciones.

a) $\frac{7x}{x^3 + 5} + \frac{6x + 1}{x^3 + 5}$

b) $\frac{3xy}{x - y} - \frac{1 - 2xy}{x - y}$

a) $\frac{7x}{x^3 + 5} + \frac{6x + 1}{x^3 + 5} = \frac{7x + 6x + 1}{x^3 + 5} = \frac{13x + 1}{x^3 + 5}$

b) $\frac{3xy}{x - y} - \frac{1 - 2xy}{x - y} = \frac{3xy - (1 + 2xy)}{x - y} = \frac{xy - 1}{x - y}$

6.8 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\frac{7x + 3}{x - 4} + \frac{5x}{x^2 - 16}$

b) $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x + 2}{x - 1}$

a) $\frac{7x + 3}{x - 4} + \frac{5x}{x^2 - 16} = \frac{(7x + 3)(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} + \frac{5x}{x^2 - 16} = \frac{7x^2 + 36x + 12}{x^2 - 16}$

b) $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{2x(x - 1) - (x + 2)(x - 5)}{(x - 5)(x - 1)} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3x + 10}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x^2 + x + 10}{x^2 - 6x + 5}$

6.9 Realiza estas operaciones: $\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4}$.

$\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2} + \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2) - (x + 2) + 4}{x^2 - 4}$

6.10 Realiza las siguientes operaciones con fracciones: $\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}$.

$\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} - \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{x(x + 2)(x - 2) + 2(x - 1)(x - 2) - (x + 1)(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{-9x + 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

6.11 Calcula estos productos.

a) $\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x + 2}$

b) $\frac{2x - 1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4}$

a) $\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 2)} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$

b) $\frac{2x - 1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4} = \frac{(2x - 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 3)(2x^2 - 4)} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 - 6x^2 - 4x + 12}$

6.12 Efectúa el producto y simplifica el resultado: $\frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3}$.

$\frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{x^2(x^2 - 1)}{(x + 1)x^3} = \frac{x^2(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)x^3} = \frac{x - 1}{x}$

6.13 Opera estos cocientes.

a) $\dfrac{4x+7}{x^2} : \dfrac{3x+1}{x+5}$ **b)** $\dfrac{5x-1}{3x-1} : \dfrac{x^2-1}{2x^2+3}$

a) $\dfrac{4x+7}{x^2} : \dfrac{3x+1}{x+5} = \dfrac{4x+7}{x^2} \cdot \dfrac{x+5}{3x+1} = \dfrac{(4x+7)(x+5)}{x^2(3x+1)} = \dfrac{4x^2+27x+35}{3x^3+x^2}$

b) $\dfrac{5x-1}{3x-1} : \dfrac{x^2-1}{2x^2+3} = \dfrac{5x-1}{3x-1} \cdot \dfrac{2x^2+3}{x^2-1} = \dfrac{(5x-1)(2x^2+3)}{(3x-1)(x^2-1)} = \dfrac{10x^3-2x^2+15x-3}{3x^3-x^2-3x+1}$

6.14 Calcula este cociente y simplifica el resultado: $\dfrac{x}{x^2-36} : \dfrac{12x^2}{x-6}$

$\dfrac{x}{x^2-36} : \dfrac{12x^2}{x-6} = \dfrac{x}{x^2-36} \cdot \dfrac{x-6}{12x^2} = \dfrac{x(x-6)}{12x^2(x-6)(x+6)} = \dfrac{1}{12x(x+6)}$

6.15 Calcula el valor numérico para $x = 2$ de cada expresión radical.

a) $\sqrt{-x^2}$ **b)** $\sqrt[3]{-x^3}$ **c)** $\sqrt{(-x)^2}$ **d)** $\sqrt[3]{(-x)^3}$

a) $\sqrt{-2^2} = \sqrt{-4}$, no existe.

b) $\sqrt[3]{-2^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

6.16 Comprueba que las siguientes expresiones radicales no son equivalentes.

a) $\sqrt{x^4}$ **y** $\sqrt[3]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt{x^6}$ **y** $\sqrt[3]{x^6}$

a) $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 \neq x^4 = x^{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{x^{12}}$

b) $\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3 \neq x^2 = x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{x^6}$

6.17 Un alumno dice que los radicales $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[3]{x^6}$ son iguales.

a) ¿Es cierta esta afirmación?

b) ¿Y si los radicales son $\sqrt{x^4}$ y $\sqrt[4]{x^8}$?

a) Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{x^6}$

b) Sí, $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 = x^{\frac{8}{4}} = \sqrt[4]{x^8}$

6.18 Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[4]{x^6}$ **b)** $\sqrt[8]{a^4}$ **c)** $\sqrt[6]{x^3}$ **d)** $\sqrt[12]{y^8}$

a) $\sqrt[4]{x^6} = x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

b) $\sqrt[8]{a^4} = a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

c) $\sqrt[6]{x^3} = x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

d) $\sqrt[12]{y^8} = y^{\frac{8}{12}} = y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{y^2}$

6.19 Simplifica estos radicales hasta conseguir un radical irreducible.

a) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^6}$ **b)** $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}}$

a) $\sqrt[18]{x^{12}y^{36}z^6} = \sqrt[\frac{18}{6}]{x^{\frac{12}{6}}y^{\frac{36}{6}}z^{\frac{6}{6}}} = \sqrt[3]{x^2y^6z}$

b) $\sqrt[45]{x^{15}y^{30}z^{15}} = \sqrt[\frac{45}{15}]{x^{\frac{15}{15}}y^{\frac{30}{15}}z^{\frac{15}{15}}} = \sqrt[3]{xy^2z}$

6.20 Reduce a índice común estos radicales.

a) $\sqrt[15]{ab}$, $\sqrt[5]{ab}$, $\sqrt[3]{ab}$ **b)** $\sqrt[3]{x^2y}$, $\sqrt[9]{x^7y^2}$, $\sqrt[6]{xy^2}$

a) $\sqrt[15]{ab}$

$\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5\cdot 3]{(ab)^3} = \sqrt[15]{a^3b^3}$

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3\cdot 5]{(ab)^5} = \sqrt[15]{a^5b^5}$

b) $\sqrt[3]{x^2y} = \sqrt[3\cdot 6]{(x^2y)^6} = \sqrt[18]{x^{12}y^2}$

$\sqrt[9]{x^7y^2} = \sqrt[9\cdot 2]{(x^7y^2)^2} = \sqrt[18]{x^{14}y^4}$

$\sqrt[6]{xy^2} = \sqrt[6\cdot 3]{(xy^2)^3} = \sqrt[18]{x^3y^6}$

6.21 Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^2y}$ **c)** $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2$

b) $\sqrt[4]{x^7y^3} : \sqrt[4]{xy^2}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}}$

a) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^2y} = (x^2y)^{\frac{1}{3}} (x^2y)^{\frac{1}{3}} = (x^2y)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = (x^2y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x^2y)^2} = \sqrt[3]{x^4y^2}$

b) $\sqrt[4]{x^7y^3} : \sqrt[4]{xy^2} = (x^7y^3)^{\frac{1}{4}} : (xy^2)^{\frac{1}{4}} = (x^7y^3 : xy^2)^{\frac{1}{4}} = (x^6y)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^6y}$

c) $\left(\sqrt[3]{x^3y}\right)^2 = \sqrt[3]{(x^3y)^2} = \sqrt[3]{x^6y^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{xy^3}} = \sqrt[3\cdot 2]{xy^3} = \sqrt[6]{xy^3}$

6.22 Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y}$ **b)** $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \left(\sqrt[6]{x}\right)^4$

a) $\sqrt[5]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^3y} : \sqrt[5]{x^2y} = \sqrt[5]{(x^2y) \cdot (x^3y) : (x^2y)} = \sqrt[5]{x^3y}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \left(\sqrt[6]{x}\right)^4 = \sqrt[3\cdot 2]{x^5} : \sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^5 : x^2 \cdot x^4} = \sqrt[6]{x^7}$

6.23 Extrae factores de estos radicales.

a) $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}}$

b) $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7}$

c) $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}}$

a) $\sqrt[7]{x^{15}y^7z^{22}} = \sqrt[7]{x^7x^7xy^7z^7z^7z^7z} = x^2yz^3 \cdot \sqrt[7]{xz}$

b) $\sqrt[3]{x^9y^{10}zt^7} = \sqrt[3]{x^3x^3x^3y^3y^3y^3yzt^3t^3t} = x^3y^3t^2 \cdot \sqrt[3]{yzt}$

c) $\sqrt[5]{x^{10}y^{11}z^{12}t^{13}} = \sqrt[5]{x^5x^5y^5y^5yz^5z^5z^2t^5t^5t^3} = x^2y^2z^2t^2 \cdot \sqrt[5]{yz^2t^3}$

6.24 Calcula estas sumas de radicales.

a) $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y}$ **b)** $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9}$

a) $\sqrt{x^3y^3} - \sqrt{xy^5} + \sqrt{x^3y} = xy\sqrt{xy} - y^2\sqrt{xy} + x\sqrt{xy} = (xy - y^2 + x)\sqrt{xy}$

b) $\sqrt[4]{x^4y^5} + \sqrt[4]{x^8y} - \sqrt[4]{y^9} = xy\sqrt[4]{y} + x^2\sqrt[4]{y} - y^2\sqrt[4]{y} = (xy + x^2 - y^2)\sqrt[4]{y}$

6.25 Realiza estos cálculos.

a) $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4}$

b) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b}$

c) $\sqrt[6]{x^2y^3} : \sqrt[4]{xy^2}$

d) $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt[5]{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy^4} = \sqrt[5]{x^3y^7} = y\sqrt[5]{x^3y^2}$

b) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b} = \sqrt[6]{(ab^2)^2} \cdot \sqrt[6]{a^4b} = \sqrt[6]{a^6b^5} = a\sqrt[6]{b^5}$

c) $\sqrt[6]{x^2y^3} : \sqrt[4]{xy^2} = \sqrt[12]{(x^2y^3)^2} : \sqrt[12]{(xy^2)^3} = \sqrt[12]{x}$

d) $\sqrt{a^3b} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{(a^3b)^3} : \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^4b^3}$

6.26 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b}$

b) $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy}$

a) $\sqrt{\sqrt{ab}} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[4]{ab} \cdot \left(\sqrt{ab^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[12]{a^3b^3 \cdot a^{18}b^{36} \cdot b^4} = \sqrt[12]{a^{21}b^{43}} = ab^3\sqrt[12]{a^9b^7}$

b) $\sqrt[5]{xy^2} \cdot \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[5]{xy^2} \cdot \sqrt[3]{x^2y^2} : \sqrt[15]{xy} = \sqrt[15]{x^3y^6 \cdot x^{10}y^{10} : xy} = \sqrt[15]{x^{12}y^{15}} = y\sqrt[15]{x^{12}}$