E J E R C I C I O S   P A R A   E N T R E N A R S E

Fracciones algebraicas equivalentes

6.29 Determina el valor numérico de estas fracciones algebraicas para $x = 1$ e $y = -2$.

a) $\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ **b)** $\dfrac{3x + 2y}{x + y}$ **c)** $\dfrac{4x^2y}{5x + y}$

a) $\dfrac{2 \cdot 1 \cdot (-2)}{1^2 + (-2)^2} = -\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{1 + (-2)} = 1$ c) $\dfrac{4 \cdot 1^2(-2)}{5 \cdot 1 + (-2)} = -\dfrac{8}{3}$

6.30 Halla los valores de x para los cuales el valor numérico de la fracción algebraica $\dfrac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - x - 6}$ es indeterminado.

Las raíces del denominador 3 y -2. Vemos qué ocurre con estos valores cuando los sustituimos en el numerador.

Si $x = 3$, $\dfrac{3^3 - 7 \cdot 3 - 6}{3^2 - 3 - 6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

Si $x = -2$, $\dfrac{(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado

6.31 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$ **d)** $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3}$

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \dfrac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

c) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 3)} = \dfrac{x + 2}{x + 3}$

d) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^5 - x^4 - 2x^3} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3(x^2 - x - 2)} = \dfrac{1}{x^3}$

6.32 Reduce a común denominador estas fracciones algebraicas.

$$\frac{x - 1}{x + 2} \qquad \frac{x + 1}{x - 2} \qquad \frac{3x}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\frac{x - 1}{x + 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x + 4)}{(x + 2)(x - 2)(x + 4)} = \frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

$$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{(x + 1)(x + 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 2)(x + 4)} = \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

$$\frac{3x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{3x}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{3x(x + 2)}{(x^2 + 2x - 8)(x + 2)} = \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}$$

6.33 Indica qué pares de fracciones algebraicas son equivalentes.

a) $\dfrac{x+1}{x-1}$ y $\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x+2}$ b) $\dfrac{x}{2x-1}$ y $\dfrac{x^2+x}{2x^2-3x+1}$ c) $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-9}$ y $\dfrac{x^2-3x+9}{(x-3)\cdot(x+3)}$

a) Sí son equivalentes, tanto el numerador como el denominador de la segunda coinciden con el de la primera multiplicados por (x^2-2).

b) No son equivalentes. Si $x=2$, $\dfrac{2}{2\cdot 2-1}=\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{2^2+2}{2\cdot 2^2-3\cdot 2+1}=\dfrac{6}{3}=2$.

c) No son equivalentes. El denominador de la segunda es la factorización del denominador de la primera, y en los numeradores no se establece la relación de igualdad porque el numerador del segundo no coincide con el desarrollo del numerador de la primera fracción.

Operaciones con fracciones algebraicas

6.34 Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$ b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}$

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x(x+1)+(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+x+x-1}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}=\dfrac{(a-2)^2+(a+2)^2}{a^2-4}=\dfrac{a^2-4a+4+a^2+4a+4}{a^2-4}=\dfrac{2a^2+8}{a^2-4}$

6.35 Opera y simplifica, reduciendo previamente a común denominador.

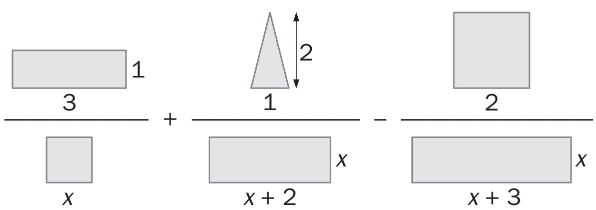
a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}$ b) $\dfrac{1}{3x^2-3}-\dfrac{2}{2x+2}+\dfrac{x+5}{x+1}$ c) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-3}$

a) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{x(x+2)+(2x+1)(x-2)-1}{x^2-4}=\dfrac{3x^2-x-3}{x^2-4}$

b) $\dfrac{1}{3x^2-3}-\dfrac{2}{2x+2}+\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{1}{3(x^2-1)}-\dfrac{2}{2(x+1)}+\dfrac{x+5}{x+1}=\dfrac{2-2\cdot 3(x-1)+6(x+5)(x-1)}{6(x^2-1)}=\dfrac{3x^2+9x-11}{3(x^2-1)}$

c) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x-3}=\dfrac{x(x+2)(x-3)-(x-1)(x-3)+(3x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{4x^3-9x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$

6.36 Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas, calculando previamente las áreas de las figuras geométricas que aparecen en los numeradores y en los denominadores.



$$\dfrac{3\cdot 1}{x^2}+\dfrac{\frac{1\cdot 2}{2}}{x(x+2)}-\dfrac{2\cdot 2}{x(x+3)}=\dfrac{3(x+2)(x+3)+x(x+3)-4x(x+2)}{x^2(x+2)(x+3)}=\dfrac{10x+18}{x^4+5x^3+6x^2}$$

6.37 **Realiza estas operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x} \cdot \dfrac{4x+3x^3}{x^2+x}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-9} : \dfrac{x^2-4}{x+3}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x} \cdot \dfrac{4x+3x^3}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)(4x+3x^3)}{(x^2+2x)(x^2+x)} = \dfrac{(x+1)x(4+3x^2)}{x(x+2)x(x+1)} = \dfrac{4+3x^2}{x(x+2)}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-9} : \dfrac{x^2-4}{x+3} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$

6.38 **Opera y simplifica.**

a) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}\right)$

b) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1)$

c) $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x}\right) = \left(\dfrac{1}{6x}\right) : \left(\dfrac{2-2}{2x^2}\right) = \dfrac{2x^2}{6x(2-x)} = \dfrac{x}{6-3x}$

b) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \left[\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) : \left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\right] \cdot (x-1) = \dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-1)x} \cdot (x-1) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right) = \dfrac{(x+1)(x^2-1)}{(x-1)^2x} : \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)x} : \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)x} = \dfrac{x^2-1}{x}$

Expresiones radicales equivalentes

6.39 **Halla el valor numérico de estas expresiones radicales para los valores $x = 2$ e $y = 1$.**

a) $\sqrt{\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}$ **b)** $\sqrt{x^3y^2+5}$ **c)** $\sqrt{2x+3y-1}$

a) $\sqrt{\dfrac{2\cdot 2\cdot 1}{2^2+1^2}} = \sqrt{\dfrac{4}{5}}$ b) $\sqrt{2^3\cdot 1^2+5} = \sqrt{13}$ c) $\sqrt{2\cdot 2+3\cdot 1-1} = \sqrt{6}$

6.40 **Calcula las posibles raíces de estas expresiones radicales.**

a) $\sqrt{144x^4}$

b) $\sqrt{81x^4}$

c) $\sqrt[3]{64x^6}$

d) $\sqrt[5]{32x^{25}}$

a) $\sqrt{144x^4} = \pm 12x^2$

b) $\sqrt{81x^4} = \pm 9x^2$

c) $\sqrt[3]{64x^6} = 4x^2$

d) $\sqrt[5]{32x^{25}} = 2x^5$

6.41 Indica qué pares de expresiones radicales son equivalentes.

a) $\sqrt{4x^2}$ **y** $-\sqrt[3]{8x^3}$ **b)** $\sqrt[3]{8x^6}$ **y** $\sqrt[9]{512x^{18}}$ **c)** $\sqrt{9x^4}$ **y** $\sqrt[4]{81x^{12}}$

a) No lo son, para $x = 1$, $\sqrt{4 \cdot 1^2} = 2$ (cuando no se indica el signo, se considera signo positivo), y $-\sqrt[3]{8 \cdot 1^3} = -2$.

b) Sí, ya que $\sqrt[3 \cdot 3]{(8x^6)^2} = \sqrt[9]{512x^{18}}$

c) No, ya que $\sqrt{9x^4} = \sqrt[2 \cdot 2]{(9x^4)^2} = \sqrt[4]{81x^8} \neq \sqrt[4]{81x^{12}}$

6.42 Escribe tres radicales equivalentes a cada uno de los siguientes.

a) $\sqrt[4]{x^2y^8}$ **b)** $\sqrt[3]{ab}$

a) $\sqrt[4]{x^2y^8} = \sqrt{xy^4} = \sqrt[8]{x^4y^{16}} = \sqrt[6]{x^3y^{12}}$

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[9]{a^3b^3} = \sqrt[15]{a^5b^5} = \sqrt[21]{a^7b^7}$

6.43 Reduce estos radicales a índice común: $\sqrt[3]{x^2}$ $\sqrt{x^3}$ $\sqrt[6]{x^5}$

$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$ $\sqrt{x^3} = \sqrt[6]{x^9}$ $\sqrt[6]{x^5}$

6.44 Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[16]{a^8b^4}$ **c)** $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}}$

b) $\sqrt[12]{(x^2y^2)^3}$ **d)** $\sqrt[20]{(x^2y^4)^5}$

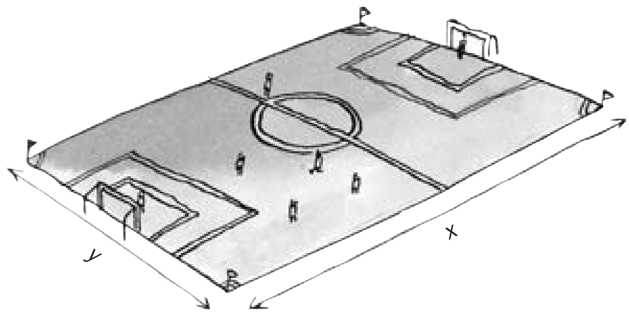
a) $\sqrt[16]{a^8b^4} = \sqrt[4]{a^2b}$

c) $\sqrt[15]{x^{12}y^{18}} = \sqrt[5]{x^4y^6}$

b) $\sqrt[12]{(x^2y^2)^3} = \sqrt{xy}$

d) $\sqrt[20]{(x^2y^4)^5} = \sqrt{xy^2}$

6.45 Utilizando el teorema de Pitágoras, calcula la diagonal del campo de fútbol.



Si x = 100 metros e y = 80 metros, ¿cuál sería la longitud de dicha diagonal?

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $x = 100$ metros e $y = 80$ metros; $d = \sqrt{100^2 + 80^2} = 10\sqrt{164} = 20\sqrt{41}$ metros

Operaciones con expresiones radicales

6.46 Realiza estas operaciones con radicales.

a) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^4y^2}$

b) $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy}$ **d)** $(\sqrt{xy})^4$

a) $\sqrt{\sqrt{x^{12}y^6}} = \sqrt[4]{x^{12}y^6} = x^3y\sqrt{y}$

c) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[3]{x^4y^2} = \sqrt[3]{x^6y^3} = x^2y$

b) $\sqrt{x^5y} : \sqrt{xy} = \sqrt{x^5y : xy} = \sqrt{x^4} = x^2$

d) $(\sqrt{xy})^4 = \sqrt{x^4y^4} = x^2y^2$

6.47 Extrae factores de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{64x^8}$ **b)** $\sqrt[3]{x^4yz^5}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}}$

a) $\sqrt[4]{64x^8} = \sqrt[4]{2^6x^8} = 2x^2\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[3]{x^4yz^5} = xz\sqrt[3]{xyz^2}$

c) $\sqrt{\dfrac{16a^6}{b^3}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot a^6}{b^3}} = \dfrac{4a^3}{b}\sqrt{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{4a^3}{b\sqrt{b}}$

6.48 Efectúa estas operaciones con expresiones radicales.

a) $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt{x^3}$ **b)** $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy}$ **c)** $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $\sqrt[3]{xy^2} : \sqrt[4]{x^3y^5}$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{x^4}}{\sqrt[6]{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{x^4}{x^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{x^5}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$

b) $\sqrt{x^2y^3} \cdot \sqrt[5]{xy} = \sqrt[10]{x^{10}y^{15}} \cdot \sqrt[10]{x^2y^2} = \sqrt[10]{x^{12}y^{17}} = xy\sqrt[10]{x^2y^7}$

c) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^9} \cdot \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6]{x^{13}} = x^2\sqrt[6]{x}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^3y^5}} = \dfrac{\sqrt[12]{x^4y^8}}{\sqrt[12]{x^9y^{15}}} = \sqrt[12]{\dfrac{1}{x^5y^7}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^5y^7}}$

6.49 Opera las siguientes expresiones radicales.

a) $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x}$

b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9}$

c) $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6}$

a) $\sqrt{12x} + \sqrt{75x} - \sqrt{27x} + \sqrt{48x} = \sqrt{2^2 \cdot 3x} + \sqrt{5^2 \cdot 3x} - \sqrt{3^3x} + \sqrt{2^4 \cdot 3x} = 8\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{ab^6} - \sqrt[3]{ab^9} = (1 - b + b^2 - b^3)\sqrt[3]{a}$

c) $5\sqrt{xy^2} + \sqrt{16x^3y^4} - \sqrt{9xy^6} = (5y + 4xy^2 - 3y^3)\sqrt{x}$

6.50 Realiza estas operaciones.

a) $\sqrt[3]{xy^3} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt[4]{x^5y}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}}$

a) $\sqrt[3]{xy^3} \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt[4]{x^5y} = \sqrt[12]{(xy^3)^4(xy)^6(x^5y)^3} = \sqrt[12]{x^{25}y^{21}} = x^2y\sqrt[12]{xy^9}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[15]{x^5 \cdot x^9}}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{\dfrac{x^{14}}{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^4}$