PROBLEMAS PARA APLICAR

5.55 Un alumno de 3.º de ESO está empeñado en transformar los polinomios $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ y $x^2 - 6x + 9$ en potencias del polinomio $x - 3$. Ayúdale en su tarea.

Aplicamos la regla de Ruffini al polinomio de grado 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ 3 & & 3 & -18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

Tenemos entonces que $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)(x^2 - 6x + 9)$.

Este segundo factor resulta ser el polinomio de grado 2 del enunciado, que es un cuadrado perfecto, el cuadrado de una diferencia, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Y entonces $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$.

5.56 Al salir de un examen de polinomios quiero contrastar con mis compañeros los resultados que hemos obtenido, pero se han emborronado dos coeficientes y no puedo distinguirlos.

$2x^3 - 5x^2 + \square\, x + \square$

Tan solo recuerdo que el polinomio era divisible por $x^2 - 4$.

¿Cuál es el polinomio que había escrito en el examen?

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -5x^2 & +\;ax & +\;b & x^2 - 4 \\ \cline{5-5} -2x^3 & & +\;8x & & 2x - 5 \\ \cline{1-3} & -5x^2 & +\;(8+a)x & & \\ & 5x^2 & & -\;20 & \\ \cline{2-4} & & (8+a)x & +\;(b-20) & \end{array}$$

Por ser divisible $(8 + a)x + (b - 20) = 0$.

Esto quiere decir que: $\begin{cases} 8 + a = 0 \\ b - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 20 \end{cases}$

El polinomio es $2x^3 - 5x^2 - 8x + 20$.

5.57 Un alumno ha confundido los números en una división de Ruffini y le ha quedado el siguiente resultado.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & & \mathbf{-7} & \mathbf{10} & \mathbf{2} \\ \hline & \mathbf{-10} & \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{14} \end{array}$$

Ayuda al alumno a reconstruir la división, sabiendo que el divisor y el resto están bien, pero que los demás números están desordenados.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 5 & -3 & 4 \\ -1 & & 2 & -7 & 10 \\ \hline & -2 & 7 & -10 & 14 \end{array}$$

5.58 Una división enlazada de Ruffini, es decir, una división en la que cada cociente obtenido lo utilizamos como nuevo dividendo, nos ha quedado de la siguiente forma.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \square & \square & \square & \square & \square \\
\mathbf{1} & & \square & \square & \square & \square \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \mathbf{0} \\
\mathbf{1} & & \square & \square & \square & \\
\hline
 & \square & \square & \square & \mathbf{0} & \\
\mathbf{1} & & \square & \square & & \\
\hline
 & \square & \square & \mathbf{0} & & \\
\mathbf{1} & & \square & & & \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & & &
\end{array}
$$

Averigua todos los coeficientes que faltan si todos los 1 pertenecen a los polinomios divisores y todos los ceros a los restos.

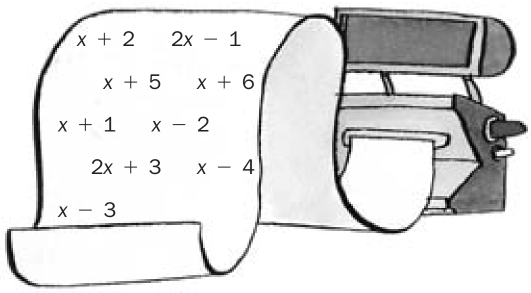
Vamos haciendo los cálculos desde la parte de abajo.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
1 & & 1 & -3 & 3 & -1 \\
\hline
 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\
1 & & 1 & -2 & 1 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
1 & & 1 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & & \\
1 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & &
\end{array}
$$

5.59 El departamento de Matemáticas de mi centro ha instalado un factorizador de polinomios.

Se trata de una máquina que proporciona un polinomio al azar y, continuación, imprime una tarjeta con los posibles factores del polinomio. Si la persona que juega encuentra los factores del polinomio en la tarjeta obtiene un premio.

Jugamos una vez y aparece en la pantalla el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$, y nos imprime una tarjeta como esta.



¿Qué combinación me proporciona el premio?

Vamos probando con cada uno de los posibles factores y tenemos que:

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 12 = -16 + 12 + 16 - 12 = 0$

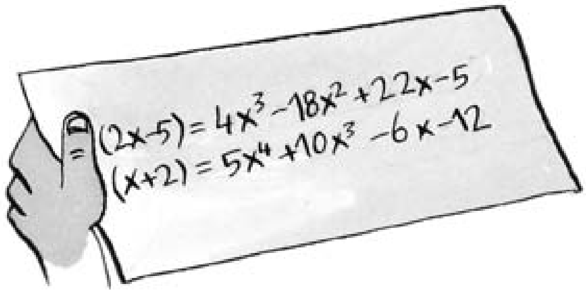
$P(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 12 = 16 + 12 - 16 - 12 = 0$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +\,3x^2 & -\,8x & -\,12 & \;2x + 3 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & -\,3x^2 & & & \;x^2 - 4 \\
\cline{1-2}
0 & 0 & & & \\
 & & +\,8x & +\,12 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Por el teorema del factor podemos decir entonces que $(x + 2)$ y $(x - 2)$ son factores. También $2x + 3$ lo es porque al dividir el polinomio por este binomio nos da resto 0.

La combinación correcta es $x - 2$, $x + 2$, $2x + 3$.

5.60 Mi hermano mayor estudia Matemáticas, y practica polinomios conmigo tapándome polinomios y jugando a que adivine lo que oculta.



Encuentra los polinomios que ha tapado.

$P(x)(2x - 5) = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 5$.

El grado de $P(x)$ tiene que ser 2, para que ambos lados de la igualdad tengan el mismo grado. $P(x)$ será de la forma $ax^2 + bx + c$.

$(ax^2 + bx + c)(2x - 5) = 2ax^3 - 5ax^2 + 2bx^2 - 5bx + 2cx - 5c = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 5$, igualando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos las incógnitas, y así, $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

$Q(x)(x + 2) = 5x^4 + 10x^3 - 6x - 12$.

El grado de $Q(x)$ tiene que ser 3, para que ambos lados de la igualdad tengan el mismo grado. $Q(x)$ será de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(x + 2) = ax^4 + (2a + b)x^3 + (2b + c)x^2 + (2c + d) + 2d = 5x^4 + 10x^3 - 6x - 12$, igualando coeficientes y resolviendo el sistema obtenemos las incógnitas.

Tenemos entonces que $Q(x) = 5x^3 - 6$.

La parte del ejercicio referente a $Q(x)$ también podríamos resolverla dividiendo por Ruffini.

5.61 Explica cómo variando simplemente el valor de k el polinomio $2x^3 - 4x + 3k$ cumple las siguientes condiciones.

a) Tiene como factor $x + 3$.

b) Al dividirlo por $x - 2$, tiene como resto 5.

c) Es divisible por $x + 1$.

d) Tiene como raíz 4.

e) Es igual al polinomio $Q(x) = 2(x^3 - 2x + 7)$.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -4 & 3k \\ -3 & & -6 & 18 & -42 \\ \hline & 2 & -6 & 14 & 3k - 42 \end{array}$$

Aplicando el teorema del factor, $3k - 42 = 0 \Rightarrow k = 14$.

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -4 & 3k \\ -2 & & 4 & 8 & 8 \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 3k + 8 \end{array}$$

Aplicando el teorema del resto, $3k + 8 = 5 \Rightarrow k = -1$.

c) Dividiendo por Ruffini y aplicando el teorema del factor tenemos que $k = -\frac{2}{3}$.

d) Dividiendo por Ruffini y aplicando el teorema del factor tenemos que $k = -\frac{112}{3}$.

e) En este caso, $3k = 14 \Rightarrow k = \frac{14}{3}$