

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 **Divide los siguientes monomios.**

a) $54x^5 : 9x^2$

b) $63x^{12} : 3x^5$

c) $35xy^6 : 7y^3$

d) $121x^2y^6 : 11yx^4$

a) $54x^5 : 9x^2 = \frac{54x^5}{9x^2} = \frac{54}{9} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 6x^3$

c) $35xy^6 : 7y^3 = \frac{35xy^6}{7y^3} = \frac{35}{7} \cdot x \cdot \frac{y^6}{y^3} = 5xy^3$

b) $63x^{12} : 3x^5 = 21x^7$ d) $121x^2y^6 : 11yx^4 = 11x^{-2}y^5$

5.2 **Efectúa estas divisiones.**

a) $(60x^3 - 75x^2) : 15x$

b) $(121x^2 - 55x) : 11x^2$

a) $(60x^3 - 75x^2) : 15x = \frac{60x^3 - 75x^2}{15x} = \frac{60x^3}{15x} - \frac{75x^2}{15x} = 4x^2 - 5x$

b) $(121x^2 - 55x) : 11x^2 = \frac{121x^2 - 55x}{11x^2} = \frac{121x^2}{11x^2} - \frac{55x}{11x^2} = 11 - \frac{5}{x}$

5.3 **Completa estas divisiones de monomios.**

a) $36xy^3 : \square = 2x$

b) $\square : 7x^3 = 11x^2$

c) $15x^2yz : \square = 3yz$

d) $\square : ab = a^2b^3$

a) $18y^3$

b) $77x^5$

c) $5x^2$

d) a^3b^4

5.4 **Realiza las siguientes divisiones.**

a) $(26x^3z - 52x^5z) : 13x^2$

b) $(26x^3z + 39x^4z) : 13x^4z$

a) $(26x^3z - 52x^5z) : 13x^2 = \frac{26x^3z - 52x^5z}{13x^2} = \frac{26x^3z}{13x^2} - \frac{52x^5z}{13x^2} = 2xz - 4x^3z$

b) $(26x^3z + 39x^4z) : 13x^4z = \frac{26x^3z + 39x^4z}{13x^4z} = \frac{26x^3z}{13x^4z} + \frac{39x^4z}{13x^4z} = \frac{2}{x} + 3$

5.5 **Realiza estas divisiones.**

a) $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) : (x^2 + x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$

c) $(x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5x + 6) : (x^2 + 3x - 2)$

d) $(x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7) : (x^4 - 3x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2 - x} \quad \quad \quad x + 5 \\ 5x^2 + 5x \\ \underline{-5x^2 - 5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

b) $C(x) = x^2 - 4x + 5$ $R(x) = x - 4$

c) $C(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 58$ $R(x) = 203x - 110$

d) $C(x) = x^2 + 3$ $R(x) = 3x^3 - 3x^2 + 14x - 10$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.6 Efectúa la siguiente división de polinomios.

$$(6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 8x - 3) : (2x^2 + 3x - 1)$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 8x - 3 \quad | \quad 2x^2 + 3x - 1 \\ -6x^4 - 9x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x^3 - x^2 \\ + 2x^3 + 3x^2 - x \\ \hline + 2x^2 + 7x \\ - 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline + 4x - 2 \end{array}$$

5.7 Escribe el dividendo de una división de polinomios en la que el divisor es $x^2 + 1$, el cociente $x^3 - 3$, y el resto $2x$.

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 3) + 2x = x^5 - 3x^2 + x^3 - 3 + 2x$$

5.8 Realiza estas divisiones aplicando la regla de Ruffini, y escribe el cociente y el resto de la división.

a) $(4x^3 - 8x^2 - 9x + 7) : (x - 3)$

c) $(5x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x + 1)$

b) $(2x^3 + 5x^2 - 4x + 2) : (x + 3)$

d) $(6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 8x - 2) : (x - 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 4 & -8 & -9 & 7 \\ & & 12 & 12 & 9 \\ \hline & 4 & 4 & 3 & 16 \end{array}$$

$$C(x) = 4x^2 + 4x + 3$$

$$R(x) = 16$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ & -6 & 3 & 3 & \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 5 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$R(x) = 5$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} -1 & 5 & -7 & 3 & -5 & 3 & -1 \\ & & -5 & 12 & -15 & 20 & -23 \\ \hline & 5 & -12 & 15 & -20 & 23 & -24 \end{array}$$

$$C(x) = 5x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 20x + 23 \quad R(x) = -24$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 6 & 9 & -10 & 8 & -2 \\ & & 12 & 42 & 64 & 144 \\ \hline & 6 & 21 & 32 & 72 & 142 \end{array}$$

$$C(x) = 6x^3 + 21x^2 + 32x + 72$$

$$R(x) = 142$$

5.9 Averigua el cociente y resto de estas divisiones mediante la regla de Ruffini.

a) $(2x^3 - x^2 + 5) : (x - 3)$

b) $(3x^5 + 3x^2 - 4) : (x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ & & 6 & 15 & 45 \\ \hline & 2 & 5 & 15 & 50 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 + 5x + 15$$

$$R(x) = 50$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ & & -3 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ \hline & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

$$C(x) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2$$

$$R(x) = -4$$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.10 Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 + 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 + x + 1$$

$$R(x) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

$$R(x) = 2$$

5.11 Utiliza el teorema del resto para calcular el resto de estas divisiones.

a) $(x^{11} - 2x^2) : (x - 1)$

c) $(x^{12} - 81) : (x + 1)$

b) $(x^7 - 1) : (x - 1)$

d) $(-x^{14} + 101) : (x + 1)$

a) $R = P(1) = 1^{11} - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1$

b) $R = P(1) = 1^7 - 1 = 1 - 1 = 0$

c) $R = P(-1) = (-1)^{12} - 81 = 1 - 81 = -80$

d) $R = P(-1) = -(-1)^{14} + 101 = -1 + 101 = 100$

5.12 La división de $P(x) = x^3 + 2x^2 + k$ por $x - 3$ da resto 0. ¿Cuánto vale k ?

Usando el teorema del resto, sabemos que $P(3) = R$. Así, $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 + k = 45 + k = 0$. De modo que $k = -45$.

5.13 Comprueba si $x + 1$ es un factor de estos polinomios.

a) $A(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$

c) $C(x) = x^7 + 1$

b) $B(x) = -2x^2 + 3x$

d) $D(x) = 2x^3 - 3x + 1$

Aplicamos el teorema del factor, así que será factor si el valor numérico del polinomio en -1 es 0.

a) $A(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) = 3 - 2 - 1 = 0$. Sí es factor de $A(x)$.

b) $B(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -2 - 3 = -5$. No es factor de $B(x)$.

c) $C(-1) = (-1)^7 + 1 = -1 + 1 = 0$. Sí es factor de $C(x)$.

d) $D(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$. No es factor de $D(x)$.

5.14 Encuentra entre los siguientes factores los del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

a) $x - 1$

c) $x + 1$

b) $x - 3$

d) $x + 2$

a) $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 0$

b) $P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -10$

c) $P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8 = 10$

d) $P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 0$

Usando el teorema del factor, afirmamos que los factores de $P(x)$ son $x - 1$ y $x + 2$.

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.19 Determina las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

b) $x^3 - x^2 - 25x + 25$

a) Las posibles raíces son 1, -1, 3, -3, 9, -9.

$$P(1) = 1^3 + 1^2 - 9 \cdot 1 - 9 = -16$$

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 9 = 0$$

$$P(3) = 3^3 + 3^2 - 9 \cdot 3 - 9 = 0$$

$$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 9 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de tres raíces en un polinomio de grado 3, así las raíces del polinomio son -1, 3 y -3.

b) Las posibles raíces son 1, -1, 5, -5, 25, -25.

$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$$

$$P(5) = 5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$$

$$P(-5) = (-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que no puede haber más de tres raíces en un polinomio de grado 3, así las raíces del polinomio son -1, 5 y -5.

5.20 Averigua las raíces de estos polinomios.

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

b) $x^2 + x + 1$

a) Las posibles raíces del polinomio son 1, -1, 2, -2, 4, -4.

$$P(1) = 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 4 = 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 4 = -10$$

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 8$$

$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 4 = -24$$

$$P(4) = 4^3 - 4^2 + 4 \cdot 4 - 4 = 60$$

$$P(-4) = (-4)^3 - (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 4 = -100$$

Este polinomio sólo tiene una raíz real, que es 1.

b) Las posibles raíces del polinomio son 1, -1.

$$P(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$$

Este polinomio no tiene raíces enteras.

5.21 Se sabe que los siguientes polinomios tienen alguna raíz entera. Indica una de ellas.

a) $x^2 - 12x + 35$

b) $x^3 - 8$

a) Por ejemplo, 5; $5^2 - 12 \cdot 5 + 35 = 0$

b) Por ejemplo, 2; $2^3 - 8 = 0$

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

5.22 Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^2 - 6x + 8$

b) $x^2 - 14x + 33$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -6 & 8 & \\ & & 4 & -8 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} 11 & 1 & -14 & 33 & \\ & & 11 & -33 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 14x + 33 = (x - 11)(x - 3)$$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 & \\ & & -2 & 8 & -6 & \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 & \\ 1 & & 1 & -3 & & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & & \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -4 & -4 & 16 & \\ & & 4 & 0 & -16 & \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 & \\ 2 & & 2 & 4 & & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x - 4)(x - 2)(x + 2)$$

5.23 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^2$

b) $x^3 - 1$

a) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

b) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

d) $x^4 - 6x^3 - 7x^2 = x^2(x^2 - 6x - 7) = x^2(x + 1)(x - 7)$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

d) $x^4 - 6x^3 - 7x^2$