EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

División y regla de Ruffini

5.26 **Realiza estas divisiones.**

a) $(12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2) : (2xy)$

b) $(15x^4 - 3x^3 + 9x^2) : (3x^2)$

c) $(5a^3b^2 - 10ab^2 + 15a^3b^4) : (5ab^2)$

a) $(12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2) : (2xy) = \dfrac{12x^2yz - 6xy^3 + 8xyz^2}{2xy} = \dfrac{12}{2}\dfrac{x^2}{x}\dfrac{y}{y}z - \dfrac{6}{2}\dfrac{x}{x}\dfrac{y^3}{y} + \dfrac{8}{2}\dfrac{x}{x}\dfrac{y}{y}z^2 = 6xz - 3y^2 + 4z^2$

b) $(15x^4 - 3x^3 + 9x^2) : (3x^2) = 5x^2 - x + 3$

c) $(5a^3b^2 - 10ab^2 + 15a^3b^4) : (5ab^2) = a^2 - 2 + 3a^2b^2$

5.27 **Efectúa cada división indicando el polinomio cociente y el polinomio resto.**

a) $x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x^2 + x) : (x^2 + x + 1)$

b) $2x^4 + 2x^2 + 3) : (x^2 + x - 1)$

c) $(x^6 - x^3 + x - 1) : (x^3 - x + 2)$

a) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ $\quad R(x) = -5x - 2$

b) $C(x) = 2x^2 - 2x + 6$ $\quad R(x) = -8x + 9$

c) $C(x) = x^3 + x - 3$ $\quad R(x) = x^2 - 4x + 5$

5.28 **De una división entera, conocemos que el dividendo es $D(x) = x^4 - x^3 + 3x + 3$, el cociente es $C(x) = x^2 - x^3 + 5$, y el resto es $R(x) = -4x - 2$ ¿Cuál es el divisor?**

$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x) \Rightarrow \dfrac{D(x) - R(x)}{C(x)} = d(x)$

En nuestro caso: $\dfrac{(x^4 - x^3 + 3x + 3) - (-4x - 2)}{x^2 - 3x + 5} = \dfrac{x^4 - x^3 + 7x + 5}{x^2 - 3x + 5}$

Haciendo los cálculos tenemos que $d(x) = x^2 + 2x + 1$.

5.29 **Sabiendo que el polinomio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + k$ es divisible por el polinomio $x^2 + 2x + 4$, calcula cuál ha de ser el valor de k.**

Si hacemos la división de polinomios $P(x) : (x^2 + 2x + 4)$, tenemos que el resto es $R(x) = k - 12$. Para que sea divisible, el resto tiene que ser 0, así tenemos que $k - 12 = 0$, de donde $k = 12$.

5.30 **El polinomio $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2$ es múltiplo del polinomio $Q(x) = x^3 - 2x + a$. Averigua los posibles valores de a.**

Como son múltiplos, tenemos que $R(x) = 0$. Así que $P(x) = C(x) \cdot Q(x)$.

$C(x)$ será de la forma $bx^2 + cx + d$; $x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 2 = (bx^2 + cx + d)(x^3 - 2x + a)$

De donde tomamos los términos del producto que tienen a: $(ab - 2c)x^2$, $(ac - 2d)x$, ad, y los igualamos a los coeficientes que corresponden:

$$ab - 2c = 4$$
$$ac - 2d = -4$$
$$ad = 2$$

Como a y d son enteros, por la última ecuación tenemos que a es 1, −1, 2 ó −2. Sabemos que $b = 1$, porque es el coeficiente en el producto de x^5. Así que haciendo pruebas para los diferentes valores de a tendremos que $a = 2$.

5.31 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, e indica el cociente y el resto de cada división.

a) $(x^3 + 2x^2 + x + 3) : (x - 1)$ b) $(x^5 - 3x^2 + x - 1) : (x + 2)$ c) $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 3)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & & 1 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & 7 \end{array}$$

$C(x) = x^2 + 3x + 4$ $R(x) = 7$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 22 & -46 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -11 & 23 & -47 \end{array}$$

$C(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 11x + 23$ $R(x) = -47$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$C(x) = x^2 + 1$ $R(x) = 0$

5.32 Mediante la regla de Ruffini, calcula el valor que debe tomar m para que se cumpla esta relación.

$3x^3 + 2x + m = (3x^2 - 3x + 5) \cdot (x + 1) + 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & 2 & m \\ -1 & & -3 & 3 & -5 \\ \hline & 3 & -3 & 5 & m - 5 \end{array}$$

Como el resto es 1, $m - 5 = 1 \Rightarrow m = 6$.

5.33 Completa las siguientes divisiones de polinomios en las que se ha aplicado la regla de Ruffini.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \square & \square \\ \square & & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & \square & \square & \square & \square & \square \\ \mathbf{-2} & & \mathbf{-2} & \square & \square & \square \\ \hline & \square & \mathbf{-4} & \mathbf{-2} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & 0 & -3 \\ 1 & & \mathbf{1} & -1 & -1 \\ \hline & 1 & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-4} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -10 & 4 & 16 \\ \mathbf{-2} & & \mathbf{-2} & 8 & 4 & -16 \\ \hline & 1 & \mathbf{-4} & \mathbf{-2} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \end{array}$$

Teoremas y raíces de un polinomio

5.34 Halla el resto de estas divisiones sin llegar a realizarlas.

a) $(x^3 - x + 2) : (x + 2)$ b) $(x^{101} + 1) : (x + 1)$ c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x - 1)$

Usamos para ello el teorema del resto:

a) $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 2 = -8 + 2 + 2 = -4$

b) $P(-1) = (-1)^{101} + 1 = -1 + 1 = 0$

c) $P(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 5$

5.35 Comprueba si las siguientes afirmaciones son correctas.

a) $P(x) = x^2 + x - 2$ tiene por factor a $x + 2$.

b) $Q(x) = x^6 + x^3 - 2$ tiene por factor a $x - 1$.

c) $R(x) = x^3 - 1$ tiene por factor a $x + 1$.

Vamos a usar el teorema del factor:

a) $P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$. Sí es factor.

b) $Q(1) = 1^6 + 1^3 - 2 = 0$. Sí es factor.

c) $R(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$. No es factor.

5.36 Halla los restantes factores de estos polinomios.

a) $P(x) = x^2 + x - 6$, que tiene por factor a $x - 2$.

b) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$, que tiene por factor a $x + 1$.

c) $R(x) = x^3 - 7x - 6$, que tiene por factor a $x - 3$.

a)
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x - 2)(x + 3)$

b) Si hacemos la división, vemos que nos queda de cociente $x^2 + x + 3$, que podemos comprobar que no tiene raíces enteras. Así, $Q(x) = (x + 1)(x^2 + x + 3)$.

c) Aplicando sucesivamente la regla de Ruffini tenemos que $R(x) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

5.37 Aplicando el teorema del resto, halla en cada caso el valor que debe tomar k.

a) $P(x) = x^4 + x^3 + kx^2 + 10x + 3$ es divisible por $x + 3$.

b) $Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + kx + 6$ tiene por resto 20 al dividirlo por $x - 1$.

c) $R(x) = 2x^2 + kx - 15$ es divisible por $x + 5$.

a) $P(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 + k(-3)^2 + 10(-3) + 3 = 27 + 9k = 0 \Rightarrow k = -3$

b) $Q(1) = 2 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 + k \cdot 1 + 6 = k + 15 = 20 \Rightarrow k = 5$

c) $R(-5) = 2(-5)^2 + k(-5) - 15 = 35 - 5k = 0 \Rightarrow k = 7$

5.38 Escribe las raíces enteras de estos polinomios.

a) $P(x) = x^2 - 2x - 15$

b) $Q(x) = x^3 - 6x^2 - 6x - 7$

c) $R(x) = x^4 + x^2 + 6$

a) Las posibles raíces son 1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15.

$P(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 15 = 0$
$P(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 - 15 = 0$

Como es de grado 2, como máximo tiene 2 raíces. De modo que las raíces de $P(x)$ son -3 y 5.

b) Las posibles raíces son 1, -1, 7, -7.

$Q(7) = 7^3 - 6 \cdot 7^2 - 6 \cdot 7 - 7 = 0$

Si comprobamos con las otras posibles raíces, vemos que para ninguna más $Q(x)$ es 0. De modo que $Q(x)$ sólo tiene una raíz entera que es 7.

c) Las posibles raíces son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Si comprobamos todos los valores, vemos que nunca se anula $R(x)$. No haría falta comprobarlo si nos fijamos en que los exponentes de x son siempre pares, con lo cual su resultado nunca va a ser negativo; $x^4 + x^2 \geqslant 0$, y sumando 6 resulta que $R(x)$ siempre es mayor que 0. De modo que $R(x)$ no tiene ninguna raíz real.

5.39 Encuentra un polinomio $P(x)$ de grado tres, cuyas raíces enteras sean -2, 1 y 4, y que, además, verifique que $P(-1) = 20$.

$P'(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$ tiene grado 3.

$P'(-1) = 10$; $2 \cdot P'(-1) = 20$

$P(x) = 2P'(x)$ sigue teniendo grado 3 y verifica que $P(-1) = 20$.

Así que el polinomio que buscamos es $P(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 4)$.

5.40 **Calcula a sabiendo que el resto obtenido al dividir $x^2 + ax - 2$ por $x - 1$ es 6 unidades inferior al obtenido al dividir $x^2 - ax - 2$ por $x + 5$.**

Usamos el teorema del resto: $P(1) = 1^2 + a \cdot 1 - 2 = a - 1$

$Q(-5) = (-5)^2 - a(-5) - 2 = 5a + 23$

Con la condición del enunciado tenemos que $a - 1 = 5a + 23 - 6 \Rightarrow a = -\frac{9}{2}$.

Factorización de polinomios

5.41 **Factoriza estas expresiones sacando factor común.**

a) $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2$

b) $8x^4 - 4x^3 + 6x^2$

c) $2x^3 \cdot (x - 2) + 4x^4 \cdot (x - 2)^2$

a) $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2 = 2xy(xz - yz + xy)$

b) $8x^4 - 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(4x^2 - 2x + 3)$

c) $2x^3(x - 2) + 4x^4(x - 2)^2 = 2x^3(x - 2)[1 + 2x(x - 2)]$

5.42 **Factoriza al máximo los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

c) $R(x) = x^3 - 19x + 30$

d) $S(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$

a)

	1	0	−5	0	4
1		1	1	−4	−4
	1	1	−4	−4	−0
2		2	6	4	
	1	3	2	0	
−1		−1	−2		
	1	2	0		

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 1)(x + 2)$

b)

	1	4	−7	−10
−1		−1	−3	10
	1	3	−10	0
2		2	10	
	1	5	0	

$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x + 1)(x - 2)(x + 5)$

c)

	1	0	−19	30
2		2	4	−30
	1	2	−15	0
−5		−5	15	
	1	−3	0	

$x^3 - 19x + 30 = (x - 2)(x + 5)(x - 3)$

d)

	1	−1	−9	9	0
1		1	0	−9	0
	1	0	−9	0	0
3		3	9	0	
	1	3	0	0	

$x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 3x) = x(x - 1)(x - 3)(x + 3)$

5.43 **Indica cuáles son las raíces de estos polinomios, sin desarrollar dichas expresiones.**

a) $P(x) = 3\,(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 2)$

b) $Q(x) = 2x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

c) $R(x) = 4x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$

¿Qué grado tiene cada uno de estos polinomios?

Puesto que los polinomios están factorizados, las raíces serán cada uno de los valores que anulan los factores.

a) Raíces: 2, −3, −2. Grado 3.

b) Raíces: 0, 2, −3. Grado 3.

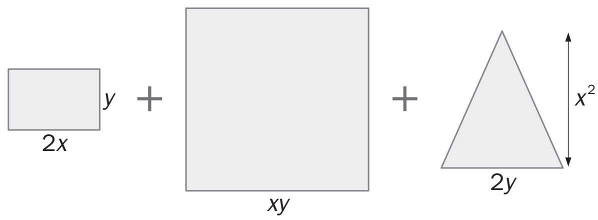
c) Raíces: 0, 1, 2. Grado 4.

5.44 Halla un polinomio de grado tres, cuyos factores sean $x + 1$, $x - 1$ y $x + 4$, y cuyo término independiente sea -8.

$P'(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 4)$, tiene grado 3 y el término independiente es el que resulta de multiplicar los tres términos independientes de cada uno de los factores: $1 \cdot (-1) \cdot 4 = -4$.

$P(x) = 2P'(x)$ tiene grado 3 y término independiente -8.

5.45 Descompón en factores la siguiente expresión, hallando previamente el área de las figuras geométricas.



$$2xy + (xy)^2 + \frac{2x^2y}{2} = 2xy + x^2y^2 + x^2y = xy(2 + xy + x)$$

5.46 Factoriza al máximo estos polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

b) $Q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

c) $R(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

d) $S(x) = x^4 - x^3 - 13x - 15$

Usamos el teorema de Ruffini y llegamos a las siguientes factorizaciones:

a) $P(x) = (x - 3)(x^2 + x + 3)$

b) $Q(x) = (x - 3)(x + 1)(2x - 2)$

c) $R(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$

d) $S(x) = (x + 1)(x - 3)(x^2 + x + 5)$