

5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES

CUESTIONES PARA ACLARARSE

5.47 De cierto polinomio de grado tres, conocemos sus tres raíces enteras. ¿Existe un único polinomio de grado tres que tenga como raíces a esas tres? Justifica tu respuesta con algún ejemplo.

No, si multiplicamos por un entero el polinomio, tiene las mismas raíces.

Por ejemplo: $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ tiene las mismas raíces que $2(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

5.48 Explica si son ciertas o falsas estas afirmaciones.

a) Un polinomio con coeficientes enteros tiene, al menos, una raíz entera.

b) Todo divisor del término independiente de un polinomio es una raíz de dicho polinomio.

c) Un polinomio de grado n tiene $n + 1$ raíces.

Justifica tus respuestas con ejemplos.

a) Falso, el polinomio $x^2 + 1$ tiene todos sus coeficientes enteros y ninguna raíz entera.

b) Falso, el 1 es divisor del término independiente de $x^2 + 1$, pero no es raíz del polinomio.

c) Falso, el polinomio $x^2 - 1$ tiene 2 raíces, 1 y -1 , que es el grado del polinomio, y no puede tener más porque estaría en contradicción con el teorema fundamental del álgebra.

5.49 ¿Qué verifica siempre el resto que resulta de dividir un polinomio por un binomio del tipo $x - a$? Justifica tu respuesta y pon algún ejemplo para explicarlo.

El resto va a ser un número entero, ya que su grado tiene que ser menor que el del divisor, y además, por el teorema del resto va a ser el valor del polinomio dividendo en a .

$x^2 + 1$, si lo dividimos por $x - 1$, podemos comprobar usando Ruffini que tiene resto 2, que es un número entero, y además $1^2 + 1 = 2$.

5.50 Encuentra un polinomio $P(x)$ de grado dos que verifique las tres condiciones siguientes.

• $x - 5$ sea factor suyo.

• $P(3) = 0$.

• Su coeficiente principal sea 4.

La segunda condición nos indica que $x - 3$ es factor del polinomio también. Como un polinomio de grado 2 solo puede tener 2 raíces a lo sumo, pues $(x - 5)(x - 3)$ tiene grado 2 y cumple las dos primeras condiciones. El coeficiente principal de este producto es 1, así que si multiplicamos por 4 tendremos el polinomio que buscábamos. $P(x) = 4(x - 5)(x - 3)$.

5.51 ¿Qué le ha de ocurrir a un polinomio de grado tres para que tenga una sola raíz entera? Explícalo con un ejemplo.

Que uno de sus factores sea un polinomio de grado 2 que no tenga raíces enteras. Por ejemplo, el polinomio de grado 3 podría ser el resultante de $x(x^2 + 1)$.

5.52 ¿Cuál es la relación existente entre los grados del dividendo, divisor, cociente y resto de una división entera de polinomios?

$$\text{Grado } (R(x)) < \text{Grado } (d(x))$$

$$\text{Grado } (D(x)) = \text{Grado } (d(x)) + \text{Grado } (C(x))$$

5.53 ¿Existe algún número n para el cual el polinomio $x^n + 1$ se anule para algún valor real de x ?

Si n es impar, se anula para $x = -1$.

5.54 ¿Qué condición debe verificar n para que el polinomio $x^n - a^n$ sea divisible por el binomio $x + a$?

Tiene que ser n par, para que así $(-a)^n = a^n$ y $x^n - a^n = 0$.