PROBLEMAS PARA APLICAR

11.57 Averigua la posición que ocupan los términos $\frac{8}{6}$, $\frac{71}{12}$ y $\frac{143}{16}$ en la sucesión cuyo término general es: $a_n = \frac{3n^2 - 4}{2n + 2}$.

$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{8}{6} \Rightarrow 6(3n^2 - 4) = 8(2n + 2) \Rightarrow n = 2$

$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{71}{12} \Rightarrow 12(3n^2 - 4) = 71(2n + 2) \Rightarrow n = 5$

$\frac{3n^2 - 4}{2n + 2} = \frac{143}{16} \Rightarrow 16(3n^2 - 4) = 143(2n + 2) \Rightarrow n = 7$

11.58 Halla el término general de una progresión aritmética de la que se conocen $a_3 = 13$ y $a_7 = 28$.

$$\begin{matrix} a_3 = 13 \Leftrightarrow \\ a_7 = 28 \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} a_1 + 2d = 13 \\ a_1 + 6d = 28 \end{cases} \Rightarrow 4d = 15 \Rightarrow d = \frac{15}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{11}{2}$$

El término general es: $a_n = \frac{11}{2} + (n - 1) \cdot \frac{15}{4} = \frac{7}{4} + \frac{15}{4}n$

11.59 La progresión 6, 11, 16, 21, ..., 126, ¿cuántos términos tiene?

La sucesión es una progresión aritmética, ya que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = 5 = d$.

$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 5 = 1 + 5n = 126 \Rightarrow 5n = 125 \Rightarrow n = 25$ términos tiene la sucesión.

11.60 Halla el término general de una progresión geométrica de la que se conocen $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

$$\begin{matrix} a_2 = 12 \Leftrightarrow \\ a_5 = 324 \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} a_1 \cdot r = 12 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{r} \\ a_1 \cdot r^4 = 324 \end{cases} \Rightarrow \frac{12}{r} \cdot r^4 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{12}{3} = 4$$

El término general es: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$.

11.61 Las longitudes de los lados de un triángulo están en progresión aritmética de diferencia 2 y su perímetro es de 15 centímetros.
¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Tres términos en progresión aritmética de diferencia 2 son de la forma: a_k, $a_k + 2$, $a_k + 4$.

Perímetro $= 3a_k + 6 = 15 \Rightarrow a_k = \frac{9}{3} = 3$. Las longitudes de los lados son 3, 5 y 7.

11.62 Calcula la suma de todos los números de dos cifras que son divisibles por tres.

Los múltiplos de tres forman una progresión aritmética: $a_n = 3n$.

El primer término de 2 cifras divisible por tres es $a_4 = 12$. El último número de 2 cifras divisible por tres es $a_{33} = 99$.

La suma de los 33 primeros términos de la progresión es $S_{33} = \frac{(a_{33} + a_1) \cdot 33}{2} = \frac{(99 + 3) \cdot 33}{2} = 1\,683$.

A esta suma hay que restar la suma de los 3 primeros términos: $S_3 = 3 + 6 + 9 = 18$.

La suma pedida es $S_{33} - S_3 = 1\,683 - 18 = 1\,665$.

11.63 La suma de los términos segundo, tercero y cuarto de una progresión aritmética es 12, y la suma de sus términos tercero, cuarto y quinto es 21. Halla el primer término y la diferencia de la progresión.

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 12 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 12 \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 6d = 12 \\ 3a_1 + 9d = 21 \end{cases} \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -2$$

11.64 Cierta ONG ha construido un pozo para abastecer de agua potable a una población de Somalia. Su coste ha sido de 2 190 euros.
¿Qué profundidad tiene el pozo si se sabe que el primer metro costó 15 euros y cada metro restante costó 4 euros más que el anterior?

El coste de cada metro del pozo es una progresión aritmética con $a_1 = 15$ y $d = 4$.

$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 4 = 11 + 4n$. El coste del pozo es igual a la suma de los n primeros términos de la progresión:

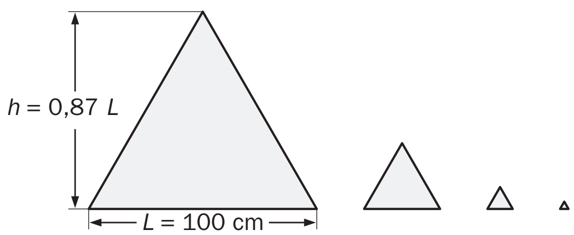
$$S_n = \frac{(11 + 4n + 15) \cdot n}{2} = 2\,190 \Leftrightarrow 26n + 4n^2 = 4\,380 \Leftrightarrow 2n^2 + 13n - 2\,190 = 0 \Rightarrow n = 30.$$

La solución negativa no tiene sentido por tratarse de una longitud. El pozo tiene 30 metros de profundidad.

11.65 La asociación de vecinos de un barrio realiza un "rastrillo" de venta de objetos usados cuya recaudación donarán a la gente necesitada del barrio. ¿Cuánto dinero recaudaron a lo largo de una semana si las recaudaciones de cada día forman una progresión geométrica de razón 2 y el primer día recaudaron 15 euros?

El último día de la semana recaudaron $a_7 = a_1 r^6 = 15 \cdot 2^6 = 960$. Para hallar cuánto recaudaron a lo largo de la semana hemos de calcular la suma de los siete primeros términos de la progresión: $S_7 = \dfrac{960 \cdot 2 - 15}{2 - 1} = 1\,905$ €.

11.66 Calcula la suma de las áreas de los cuatro triángulos equiláteros de la figura sabiendo que el lado de cada uno es tres veces menor que el siguiente triángulo.



Las áreas de los triángulos forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{9}$. Hallamos el área del primer triángulo.

$$a_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{L \cdot 0{,}87\,L}{2} = 4\,350 \text{ cm}^2,\ a_4 = a_1 r^3 = \frac{4\,350}{9^3} \text{ cm}^2$$

La suma de las áreas es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión:

$$S_4 = \frac{\dfrac{4\,350}{9^3} \cdot \dfrac{1}{9} - 4\,350}{\dfrac{1}{9} - 1} = 4\,893{,}75$$

11.67 ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los múltiplos de 3 y la suma de los múltiplos de 5 comprendidos entre 100 y 1 000?

Los múltiplos de tres forman una progresión aritmética: $a_n = 3n$.

Los múltiplos de cinco forman una progresión aritmética: $b_n = 5n$.

Los múltiplos primero y último de tres buscados son: $a_{34} = 102$ y $a_{333} = 999$.

Los múltiplos primero y último de cinco buscados son: $b_{21} = 105$ y $b_{199} = 995$.

Las sumas de los 33 y 333 primeros múltiplos de tres son:

$$S_{33} = \frac{(99 + 3) \cdot 33}{2} = 1\,683 \quad \text{y} \quad S_{333} = \frac{(999 + 3) \cdot 333}{2} = 166\,833$$

Las sumas de los 20 y 199 primeros múltiplos de cinco son:

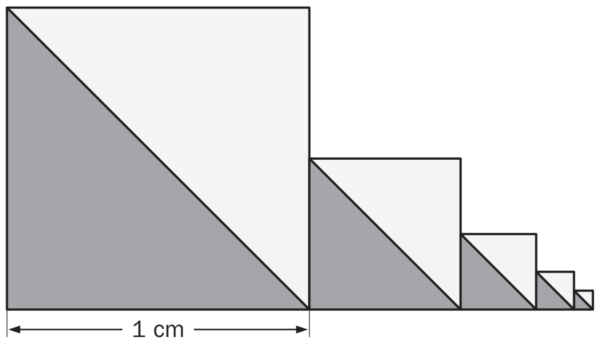
$$S_{20} = \frac{(100 + 5) \cdot 20}{2} = 1\,050 \quad \text{y} \quad S_{199} = \frac{(995 + 5) \cdot 199}{2} = 99\,500$$

La suma de los múltiplos de tres buscados: $S_{333} - S_{33} = 166\,833 - 1\,683 = 165\,150$.

La suma de los múltiplos de cinco buscados: $S_{199} - S_{20} = 99\,500 - 1\,050 = 98\,450$.

La diferencia entre los múltiplos de tres y de cinco pedida es: $165\,150 - 98\,450 = 66\,700$.

11.68 Calcula el área de la región coloreada teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es la mitad del anterior.



La sucesión de los catetos de los triángulos rectángulos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Por otro lado, la sucesión de las áreas de los triángulos es una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{4}$.

Finalmente, $a_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^9} \Rightarrow S_5 = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2} - 1} = 0{,}67\ \text{cm}^2$

11.69 Los lados de un pentágono están en progresión aritmética, el lado mayor mide 12 centímetros y el perímetro es de 40 centímetros. Calcula las longitudes de los lados del pentágono.

Los términos de la progresión aritmética son: a_k, $a_k + d$, $a_k + 2d$, $a_k + 3d$, $a_k + 4d$.

$$\begin{matrix} \textit{Perímetro} \equiv \\ \textit{Lado} \equiv \end{matrix} \begin{cases} 5a_k + 10d = 40 \\ a_k + 4d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a_k + 20d = 60 \\ 5a_k + 10d = 40 \end{cases} \Rightarrow d = 2 = a_k = 4$$

Los lados miden 4, 6, 8, 10 y 12 cm.

11.70 La presa de Assuán situada sobre el río Nilo, en Egipto, contiene $164 \cdot 10^9$ litros de agua el día del comienzo del verano. Teniendo en cuenta que cada día pierde el 0,2 % de su capacidad, ¿cuántos litros contendrá tras haber pasado 90 días? Utiliza la calculadora.

Progresión geométrica de razón $r = 1 - 0{,}002$

$a_{90} = 164 \cdot 10^9 \cdot 0{,}998^{89} = 1{,}37 \cdot 10^{11}$ litros

11.71 Interpolar *m* números entre dos números dados cualesquiera es hallar los *m* términos intermedios de una progresión aritmética cuyos primero y último término son los números dados.

Interpola cuatro números entre el 10 y el 100.

$a_1 = 10$; $a_6 = 100 = 10 + 5 \cdot d \rightarrow d = 18$

$a_2 = 28$; $a_3 = 46$; $a_4 = 64$; $a_5 = 82$

11.72 Interpolar *m* medios proporcionales entre dos números dados cualesquiera es hallar los *m* términos de una progresión geométrica cuyos primero y último término son los números dados.

Interpola dos medios proporcionales entre 1 y 16.

$a_1 = 1$; $a_4 = 16 = a_1 \cdot r^3 = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

$a_2 = 2\sqrt[3]{2}$; $a_3 = 4\sqrt[3]{4}$