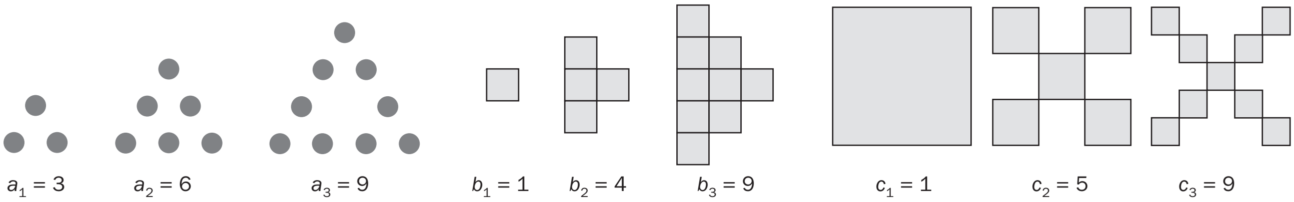
EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

11.25 **Encuentra el término general de las sucesiones estudiando sus regularidades.**



a) $a_1 = 3$; $a_2 = 6$; $a_3 = 9$; $a_4 = 12$; ...; $a_n = 3n$

b) $b_1 = 1$; $b_2 = 4$; $b_3 = 9$; $b_4 = 16$; ...; $b_n = n^2$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = 5$; $c_3 = 9$; $c_4 = 13$; ...; $c_n = 4n - 3$

11.26 **Completa el término que falta en cada sucesión.**

a) 8, 10, 12, □, 16 ...

b) 35, □, 25, 20, 15 ...

c) 0, 3, □, 9, 12 ...

d) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \square, \frac{5}{81}$ **...**

a) 14 b) 30 c) 6 d) $\frac{5}{27}$

11.27 **Dadas las sucesiones:**

$a_n = 4n - 3$

$b_n = (-1)^n \cdot 2n$

$c_n = n^2 + 2$

a) Escribe los cinco primeros términos de cada sucesión.

b) Halla el término general de las sucesiones:

$(a_n) + (b_n)$ $\quad 3 \cdot (a_n)$ $\quad (b_n) \cdot (c_n)$ $\quad a_n \cdot (b_n + c_n)$

a) $a_n = 4n - 3$; $a_1 = 1$; $a_2 = 5$; $a_3 = 9$; $a_4 = 13$; $a_5 = 17$

$b_n = (-1)^n \cdot 2n$; $b_1 = -2$; $b_2 = 4$; $b_3 = -6$; $b_4 = 8$; $b_5 = -10$

$c_n = n^2 + 2$; $c_1 = 3$; $c_2 = 6$; $c_3 = 11$; $c_4 = 18$; $c_5 = 27$

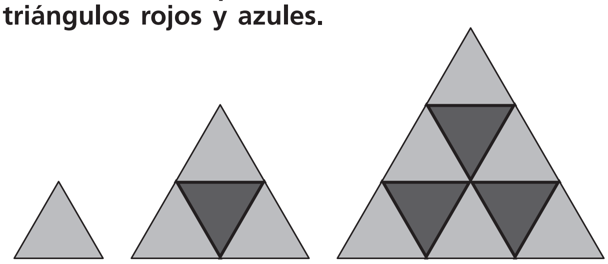
b) $a_n + b_n = 4n - 3 + (-1)^n \cdot 2n$

$3 \cdot a_n = 3 \cdot (4n - 3) = 12n - 9$

$b_n \cdot c_n = ((-1)^n \cdot 2n)(n^2 + 2) = (-1)^n \cdot 2n^3 + 2(-1)^n$

$a_n \cdot (b_n + c_n) = (4n - 3)((-1)^n \cdot 2n + n^2 + 2) = (-1)^n \cdot 8n^2 + 4n^3 + 8n - 6n \cdot (-1)^n - 3n^2 - 6$

11.28 **Escribe los cinco primeros elementos de las sucesiones que determinan, respectivamente, el número de triángulos rojos y azules.**



Rojos: 1, 3, 6, 10, 15 Azules: 0, 1, 3, 6, 10

11.29 Escribe los diez primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y los restantes términos se obtienen multiplicando por 5 y restándole 3 al término anterior.

$a_1 = 2$; $a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$; $a_3 = 7 \cdot 5 - 3 = 32$; $a_4 = 32 \cdot 5 - 3 = 157$; $a_5 = 5 \cdot 157 - 3 = 782$; $a_6 = 5 \cdot 782 - 3 = 3\,907$; $a_7 = 5 \cdot 3\,907 - 3 = 19\,532$; $a_8 = 5 \cdot 19\,532 - 3 = 97\,657$; $a_9 = 488\,282$; $a_{10} = 2\,441\,407$

11.30 Construye las sucesiones recurrentes dadas por:

a) $a_1 = 2$; $a_n = a_{n-1} - 4$

b) $a_1 = 6$; $a_n = a_{n-1} + 2$

c) $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$

d) $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

a) 2, −2, −6, −10, −14, −18 …

b) 6, 8, 10, 12, 14, 16 …

c) 2, 3, 13, 62, 297, 1 423, 6 818 …

d) 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125 …

Progresiones aritméticas

11.31 Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla el término general:

a) −8, −4, 0, 4, 8 …

b) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ …

c) 3, 9, 27, 81, 243 …

d) 1, 1, 1, 1, 1 …

a) $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = 4 = d$. Sí es una progresión aritmética. $an = -8 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 12$

b) $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = ... = \frac{1}{2} = d$. Sí es una progresión aritmética. $bn = \frac{1}{2} + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

c) $c_2 - c_1 = 6$; $c_3 - c_2 = 18 \Rightarrow$ No es una progresión aritmética.

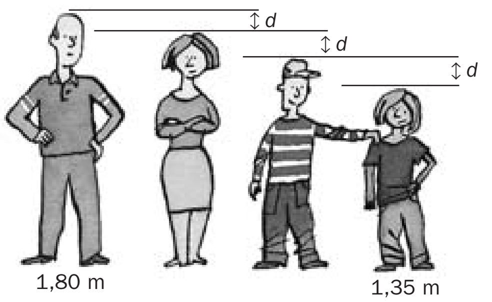
d) $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = ... = 0$. Sí es una progresión aritmética. $d_n = 1$

11.32 Halla el primer término y el término general de una progresión aritmética cuyo quinto término es 19 y la diferencia es 3.

$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 3 = 19 \Rightarrow a_1 = 19 - 12 = 7$

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 4$

11.33 El dibujo representa las alturas de los miembros de una familia. ¿Cuánto mide la madre?, ¿y el hijo?



La sucesión formada por las alturas de los miembros de la familia es una progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}15$ m $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Altura de la madre = 1,65 m; Altura del hijo = 1,50 m.

11.34 Halla el primer término de la progresión aritmética cuyo término vigésimo es 100 y la suma de los 20 primeros términos es 1 050.

$$S_{20} = \frac{20 \cdot (a_1 + 100)}{2} = 1\,050 \Rightarrow 20a_1 = 100 \Rightarrow a_1 = 5$$

11.35 Al comienzo del año, Juan decide ahorrar para comprarse una consola de videojuegos. En enero mete en su hucha 10 euros y cada mes introduce la misma cantidad que el mes anterior y 1 euro más. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado al finalizar el año?

El año tiene 12 meses. El dinero que introduce cada mes en la hucha es una progresión aritmética de

$d = 1;\ a_1 = 10 \cdot a_{12} = 10 + (12 - 1) \cdot 1 = 21$

Dinero ahorrado $\equiv S_{12} = \dfrac{12 \cdot (10 + 21)}{2} = 6 \cdot 31 = 186$ €

11.36 ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 4, 8, 12, 16 … hay que tomar para que el resultado de su suma sea 220?

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 4 = 4n$

$S_n = \dfrac{n \cdot (4 + a_n)}{2} = 220 \Rightarrow 4n + 4n = 440 \Rightarrow 8n = 440 \Rightarrow n = 55$ es el número de términos.

11.37 Las anotaciones obtenidas por las cinco jugadoras de un equipo de baloncesto están en progresión aritmética. Si el equipo consiguió 70 puntos y la máxima anotadora obtuvo 24 puntos, ¿cuántos puntos anotaron las restantes jugadoras?

$S_5 = \dfrac{5 \cdot (a_1 + 24)}{2} = 70 \Rightarrow 5a_1 = 20 = a_1 = 4$

$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d = 24 \Rightarrow d = \dfrac{20}{4} = 5$

$a_1 = 4;\ a_2 = 9;\ a_3 = 14;\ a_4 = 19;\ a_5 = 24$ son las anotaciones de las jugadoras del equipo.

Progresiones geométricas

11.38 Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla el término general.

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \ldots$

b) 1, 2, 4, 8, 16 …

c) 4, 8, 12, 16, 20 …

d) $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}, \frac{81}{125} \ldots$

a) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = \dfrac{1}{3} = r$. Sí es una progresión geométrica; $a_n = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

b) $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \ldots = 2 = r$. Sí es una progresión geométrica; $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

c) $\dfrac{c_2}{c_1} \neq \dfrac{c_3}{c_2} \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

d) $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{d_3}{d_2} = \ldots = \dfrac{3}{5} = r$. Sí es una progresión geométrica; $d_n = 5 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{3^{n-1}}{5^{n-2}}$

11.39 De una progresión geométrica sabemos que su cuarto término es $\frac{27}{8}$ y que la razón es $\frac{3}{2}$. Halla el primer término.

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = \dfrac{27}{8} \Rightarrow a_1 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8} \Rightarrow a_1 = 1$

11.40 El primer término de una progresión geométrica es 2 y la razón es 4. ¿Qué lugar ocupa en la progresión el término cuyo valor es 131 072?

$a_n = 2 \cdot 4^{n-1} = 131\,072 \Rightarrow 4^{n-1} = 65\,536 = 4^8 \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$

11.41 Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 63, 21, 7, $\frac{7}{3}$ ...

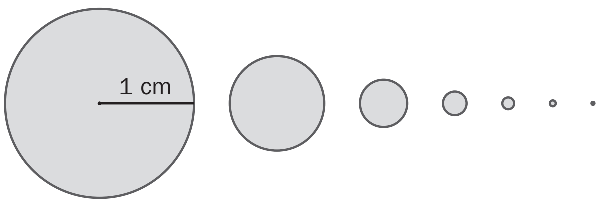
$$a_{10} = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{63}{3^9} = \frac{3^2 \cdot 7}{3^9} = \frac{7}{3^7};\ S_{10} = \frac{\frac{7}{3^7} \cdot \frac{1}{3} - 63}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{413\,336}{4\,374} \approx 94{,}5$$

11.42 El cuarto término de una progresión geométrica es 225 y la razón es 3. Halla la suma de los 8 primeros términos.

$$a_4 = a_1r^3 = 27a_1 = 225 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{3};\ a_8 = a_1r^7 = 25 \cdot 3^6 = 18\,225$$

$$S_8 = \frac{a_8r - a_1}{r - 1} = \frac{18\,225 \cdot 3 - \frac{25}{3}}{3 - 1} = \frac{82\,000}{3} = 27\,333{,}\widehat{3}$$

11.43 El radio de cada círculo es la mitad que el del anterior.



Calcula:

a) El área del círculo que ocupa el quinto lugar.

b) La suma de las áreas de los 6 primeros círculos de la sucesión.

a) La sucesión de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$; $a_5 = \pi\left(\frac{1}{2^4}\right)^2 = \frac{\pi}{2^8} = 0{,}012\ \text{cm}^2$.

b) La sucesión formada por las áreas de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$.

$$a_6 = \pi\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{\pi}{2^{10}};\ S_6 = \frac{\frac{\pi}{2^{10}} \cdot \frac{1}{2^2} - \pi}{\frac{1}{2^2} - 1} = \frac{4\pi(1 - 2^{12})}{2^{12} \cdot (-3)} = 4{,}18\ \text{cm}^2$$

11.44 Toma un folio y dóblalo por la mitad. Obtienes dos cuartillas que juntas tendrán un grosor doble del grosor del folio. Ahora dobla nuevamente las dos cuartillas y obtienes cuatro octavillas, con un grosor cuádruple que el del folio. Si la hoja inicial tuviera un grosor de 0,1 milímetros y fuese tan grande que pudieras repetir la operación 100 veces, ¿qué grosor tendría el fajo resultante?

$a_{100} = 0{,}1 \cdot (2)^{99} = 6{,}34 \cdot 10^{28}$ mm