

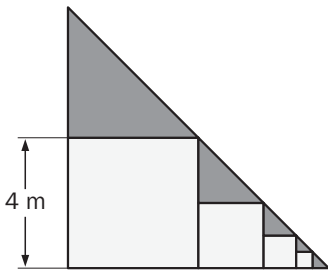
AMPLIACIÓN

11.88 Calcula $\frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9}{3^{10} - 1}$

El numerador es la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica de razón

$$r = 3 \Rightarrow \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9}{3^{10} - 1} = \frac{\frac{3^9 \cdot 3 - 1}{3 - 1}}{3^{10} - 1} = \frac{3^{10} - 1}{2(3^{10} - 1)} = \frac{1}{2}$$

11.89 Halla el área de la figura sombreada.



Los triángulos rectángulos de la figura son isósceles, con lo que los dos catetos son iguales.

La sucesión de las áreas de los triángulos rectángulos es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$ y cuyo primer término es:

$$a_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8; \quad a_6 = a_1 r^5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{8}{4^5}$$

La suma de las áreas es igual a la suma de los seis primeros términos de la progresión:

$$S_6 = \frac{\frac{8}{4^5} \cdot \frac{1}{4} - 8}{\frac{1}{4} - 1} = 10,7 \text{ m}^2$$

11.90 Un reloj da tantas campanadas como indica la hora y además en las medias da una campanada.

Halla el número de campanadas que da en un día.

La suma de las campanadas que se dan a las horas en punto es el doble de la suma de los 12 primeros términos de una progresión aritmética de diferencia 1 y primer término: $a_1 = 1$:

$$a_{12} = a_1 + 11d = 12; \quad S_{12} = \frac{(1 + 12) \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6 = 78 \Rightarrow 2 \cdot S_{12} = 2 \cdot 78 = 156 \text{ campanadas a las horas en punto.}$$

Finalmente, como se da una campanada a las medias y el día tiene 24 horas, se dan 24 campanadas a esas horas; con lo que el número total de campanadas es de $156 + 24 = 180$.

11 SUCESIONES. PROGRESIONES

11.91 En un cuadrado se inscribe un círculo. Sobre el círculo se inscribe un cuadrado, y se repite el proceso hasta obtener 10 cuadrados y 10 círculos. Si el lado del cuadrado inicial mide 4 centímetros, calcula:

- La suma de las áreas de los 10 círculos obtenidos.
- La suma de las áreas de los 10 cuadrados obtenidos.

La sucesión formada por las áreas de los cuadrados es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y $a_1 = 16$. La sucesión formada por las áreas de los círculos es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ y $b_1 = 4\pi$.

$$\text{a) La suma de las áreas de los cuadrados es } S_{10} = \frac{\frac{16}{2^9} \cdot \frac{1}{2} - 16}{\frac{1}{2} - 1} \approx 31,97 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) La suma de las áreas de los círculos es } S_{10} = \frac{4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} - 4\pi}{\frac{1}{2} - 1} \approx 25,11 \text{ cm}^2$$

11.92 La suma de los términos primero y tercero de una progresión geométrica es 10 y la suma de los términos segundo y cuarto es 20. Calcula el primer término y la razón de la progresión.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 10 \\ a_2 + a_4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r^2 = 10 \\ a_1 r + a_1 r^3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + r^2) = 10 \\ a_1 r(1 + r^2) = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{a_1} = \frac{20}{a_1 r} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a_1 = 2$$