

**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CURSO 2011-2012.  
MATEMÁTICAS II**

**Opción A**

**Ejercicio 1 opción A, modelo Septiembre 2011**

Sea la función continua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

(a) [1'25 puntos] Calcula el valor de  $k$ .

(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x=1$ .

**Solución**

(a)

Calcula el valor de  $k$ .

Como la función es continua en  $\mathbb{R}$  (nos lo dice el problema), es continua en  $x = 0$ .

Si  $f(x)$  es continua en  $x = 0$ , tenemos  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

$$f(0) = (0 + k) = k; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = (0 + k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0}, \text{ aplicamos la Regla de L'Hopital} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{2x} = \{\text{simplificando}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}}{1} = e^0 = 1.$$

Igualando las tres expresiones tenemos  $k = 1$ .

(b)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x=1$ .

$$\text{Nuestra función es } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como nos piden la recta tangente en  $x = 1$ , la rama es  $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$ .

La recta tangente es “ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ ”

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}, \quad f(1) = e^1 - 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x \cdot e^{x^2}) \cdot x^2 - (e^{x^2}-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}, \quad f'(1) = 2 \cdot e^1 \cdot 1 - (e^1 - 1) \cdot 2 = 2e - 2e + 2 = 2.$$

La recta tangente pedida es  $y - (e^1 - 1) = 2(x - 1)$

**Ejercicio 2 opción A, modelo Septiembre 2012**

$$\text{Sea } I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx.$$

(a) [1'75 puntos] Expresa la integral  $I$  aplicando el cambio de variable  $t = \sqrt{1-x}$

(b) [0'75 puntos] Calcula el valor de  $I$ .

**Solución**

(a)

Expresa la integral  $I$  aplicando el cambio de variable  $t = \sqrt{1-x}$

Calculamos 1º la integral indefinida

$$I_1 = \int \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx$$

Cambio  $t = \sqrt{1-x} \rightarrow t^2 = 1-x \rightarrow x = 1-t^2 \rightarrow dx = -2t dt$ . Sustituyendo, tenemos

$$I_1 = \int \frac{1-t^2}{1+t} \cdot 2t dt = \{\text{diferencia de cuadrados}\} = \int \frac{(1-t)(1+t)}{1+t} \cdot (-2t) dt = \{\text{simplificando}\} = -2 \int (t-t^2) dt =$$

$$= -2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) = -t^2 + (2/3)t^3 = \{\text{quito cambio}\} = -(\sqrt{1-x})^2 + (2/3)(\sqrt{1-x})^3 = -(1-x) + (2/3)(\sqrt{1-x})^3$$

(b)

Calcula el valor de  $I$ .

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx = [- (1-x) + (2/3)(\sqrt{1-x})^3]_0^1 = (- (1-1) + (2/3)(\sqrt{1-1})^3) - (- (1-0) + (2/3)(\sqrt{1-0})^3) = 0 + 1 - 2/3 = 1/3.$$

**Ejercicio 3 opción A, modelo Septiembre 2012**

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} kx + 2y &= 2 \\ 2x + ky &= k \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

(a) [0'5 puntos] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro  $k$ .(b) [1 punto] Especifica para qué valores del parámetro  $k$  es determinado y para cuáles indeterminado.

(b) [1 punto] Halla las soluciones en cada caso

**Solución**

(a)

Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro  $k$ .

Sea  $A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , la matriz de los coeficientes y  $A^* = \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  la matriz ampliada.

Como observamos  $\text{rango}(A) \leq 2$ , puesto que sólo tiene dos columnas.Para que el sistema sea compatible  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$ , por tanto  $\text{rango}(A^*)$  tiene que ser menor que 3, luego  $\det(A^*) = |A^*| = 0$ .

$$|A^*| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3+C_1 \\ C_3+C_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} k & k+2 & k+2 \\ 2 & k+2 & k+2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos columnas iguales; luego } \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*),$$

luego el sistema es compatible independientemente del valor de " $k$ ".

(b)

Especifica para qué valores del parámetro  $k$  es determinado y para cuáles indeterminado.

En  $A$  los menores de orden 2 son  $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$  y  $\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4, \text{ si lo igualamos a 0 las soluciones son } k = 2 \text{ y } k = -2.$$

Si igualamos los otros dos determinantes a 0, la solución es  $k = -2$ .Si  $k \neq 2$  y  $k \neq -2$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 = n^\circ$  de incógnitas, luego el sistema es determinado.

Si  $k = 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

En  $A$  como  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$ , luego  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = n^\circ$  de incógnitas, por tanto el sistema es determinado (recordamos que el determinante de  $A^*$  es 0).

Si  $k = -2$ ,  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

En  $A$  como  $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2+F_1 \\ F_3+(1/2)F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , luego  $\text{rango}(A) = 1$  (la matriz sólo tiene una fila con elementos distintos de cero).

En  $A^*$  como  $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1, F_3+(1/2)F_1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , luego  $\text{rango}(A^*) = 1$  (la matriz sólo tiene una fila con elementos distintos de cero).

Como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < n^\circ$  de incógnitas, por tanto el sistema es indeterminado.

(b)

Halla las soluciones en cada caso

Si  $k \neq 2$ ,  $k \neq -2$  y  $k = 2$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 = n^\circ$  de incógnitas, luego el sistema es determinado. Veamos las soluciones, para lo cual elegimos sólo dos ecuaciones (la 2ª y 3ª).

$$2x + ky = k$$

$$x - y = -1$$

Lo resolvemos por Cramer,  $x = \frac{\begin{vmatrix} k & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2-k} = 0$ ;  $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-k}{-2-k} = 1$ . Solución  $(x,y) = (0,1)$ , y se le

diésemos a  $k$  el valor 2 saldría lo mismo.

Si  $k = -2$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 1 < n^\circ$  de incógnitas, por tanto el sistema es indeterminado. Sólo necesitamos una ecuación. Tomamos la 3ª

De  $x - y = -1$  tenemos  $x = -1 + y$ . Tomando  $y = \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x = -1 + \lambda$ . Solución  $(x,y) = (-1 + \lambda, \lambda)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

#### Ejercicio 4 opción A, modelo Septiembre 2012

Sean los puntos  $A(0,0,1)$ ,  $B(1,0,-1)$ ,  $C(0,1,-2)$  y  $D(1,2,0)$ .

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano  $\pi$  determinado por los puntos A, B y C.

(b) [0'5 puntos] Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

(c) [1 punto] Calcula la distancia del punto D al plano  $\pi$ .

#### Solución

(a)

Halla la ecuación del plano  $\pi$  determinado por los puntos A, B y C.

Para la ecuación del plano necesitamos un punto, el  $A(0,0,1)$ , y dos vectores independientes, el  $\mathbf{AB} = (1,0,-2)$  y  $\mathbf{AC} = (0,1,-3)$

La ecuación general del plano es  $\pi \equiv 0 = \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = x(2) - y(-3) + (z-1)(1) =$

$$= 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

Su vector normal es  $\mathbf{n} = (2,3,1)$ .

(b)

Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

Para que los cuatro puntos no sean coplanarios, el punto  $D(1,2,0)$  no debe de pertenecer al plano  $\pi$ .

Como  $2(1) + 3(2) + (0) - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{7} = \mathbf{0}$ , lo cual es absurdo, luego D no está en  $\pi$  y **los cuatro puntos no son coplanarios**.

(c)

Calcula la distancia del punto D al plano  $\pi$ .

$$\text{Aplicando la fórmula } d(D, \pi) = \frac{|2(1)+3(2)+(0)-1|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{7}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \text{ u}^2.$$

## Opción B

## Ejercicio 1 opción B, modelo Septiembre 2012

Sea la función  $f$  definida por  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$  para  $x \neq 1$ .

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función  $f$ .

(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .

## Solución

(a)

Estudia las asíntotas de la gráfica de la función  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ .

La recta  $x = a$  es una asíntota vertical (A.V.) de  $f(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = [e^{-1}/0^+] = +\infty$  ( $e^{-1} = 1/e > 0$ ); la recta  $x = 1$  es una A.V. de  $f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = [e^{-1}/0^-] = -\infty$$

La recta  $y = b$  es una asíntota horizontal (A.H.) de  $f(x)$  si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(1-x)} = [1/-\infty] = 0$  la recta  $y = 0$  es una A.H. de  $f(x)$  en  $+\infty$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{+x}}{1+x} = \{\infty/\infty; \text{aplicamos L'Hopital}\} = +\infty$ ,  $f(x)$  no tiene A.H. en  $-\infty$ .

Como tiene A.H.,  $f(x)$  no tiene asíntota oblicua (A.O.)

Veamos la posición relativa

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(1-x)} = [1/-\infty] = 0^-$ ,  $f(x)$  está por debajo de la A.H. en  $+\infty$  (le damos a  $x$  el

valor  $+100$ )

(b)

Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ .

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de  $f'(x)$

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ . Vemos que la función no está definida en  $x = 1$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-1)(1-x) - e^{-x}(-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^{-x}(-1+x+1)}{(1-x)^2} = \frac{x \cdot e^{-x}}{(1-x)^2}$$

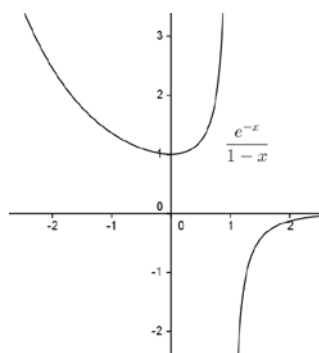
Si  $f'(x) = 0$ ;  $x \cdot e^{-x} = 0$ , de donde  $x = 0$  ( $e^{-x}$  es una exponencial y no se anula nunca).

Como  $f'(-1) = -1 \cdot e^{-1}/(+) < 0$ ,  $f'(x) < 0$  en  $x < 0$ , luego  $f(x)$  es estrictamente decreciente en  $(-\infty, 0)$ .

Como  $f'(2) = 2 \cdot e^{-2}/(+) = (+)/(+) > 0$ ,  $f'(x) > 0$  en  $(0, +\infty) - \{1\}$ , luego  $f(x)$  es estrictamente creciente en  $(0, +\infty) - \{1\}$ .

Por definición en  $x = 0$  hay un mínimo relativo que vale  $f(0) = e^0/1 = 1$ .

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica es :



**Ejercicio 2 opción B, modelo Septiembre 2012**

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x=1$ .

(b) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta  $x + 2y = 5$  y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

**Solución**

(a)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

Sabemos que la recta tangente de  $f$  en  $x = 1$  es " $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ "

$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$ , luego  $f(1) = 8/4 = 2$

$f'(x) = -2x/4 = -x/2$ , luego  $f'(1) = -1/2$ , por **la recta tangente es  $y - 2 = (-1/2) \cdot (x - 1)$** . Operando tenemos que la recta tangente es  **$y = -x/2 + 5/2$** .

(b)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta  $x + 2y = 5$  y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

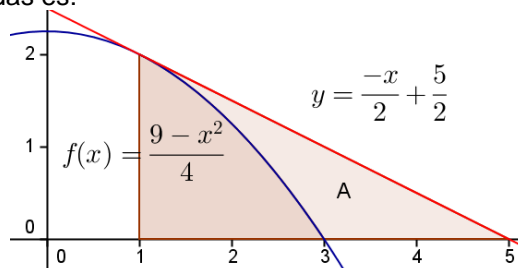
La gráfica de  $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$  ( $a = -1/4$ ,  $b = 0$ ,  $c = 9/4$ ), es la de una parábola muy parecida a " $-x^2$ " (ramas hacia abajo y con vértice en  $(0, 9/4) = (0, 2'25)$ ), pero un poco más abierta (al estar multiplicada por  $1/4$ ) y desplazada "4" unidades hacia arriba en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en  $(0, 4)$ .

Vemos que los cortes con el eje OX son  $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$ , porque de  $9 - x^2 = 0$  obtenemos  $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ .

La recta  $x + 2y = 5$  es  $y = -x/2 + 5/2$ , como hemos visto en el apartado anterior es la recta tangente en  $x=1$ .

Con dos puntos es suficiente para dibujarla. Para  $x = 1$ ,  $y = 2$ ; para  $y = 0$ ,  $x = 5$ . Puntos  $(1, 2)$  y  $(0, 5)$

Un esbozo de las gráficas pedidas es:



Donde me piden el área A, que vemos es el área del triángulo bajo la recta entre 1 y 5, menos el área bajo la parábola entre 1 y 3.

Área pedida  $A = (1/2)(5-1)(2) - \int_1^3 \frac{9-x^2}{4} dx = 4 - [9x/4 - x^3/12]_1^3 = 4 - [(27/4 - 27/12) - (9/4 - 1/12)] = 5/3 \text{ u}^2$ .

**Ejercicio 3 opción B, modelo Septiembre 2012**

Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

(a) [1'25 puntos] Clasifícalo según los distintos valores del parámetro  $\lambda$ .

(b) [1 punto] Resuélvelo para  $\lambda = 0$  y  $\lambda = -1$ .

**Solución**

(a)

Clasifícalo según los distintos valores del parámetro  $\lambda$ .

La matriz de los coeficientes del sistema es  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ .

Si  $\det(A) = |A| \neq 0$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(2\lambda^2 + \lambda) - (-1)(\lambda) + 0 = 2\lambda^2 + 2\lambda \neq 0,$$

Resolviendo la ecuación  $2\lambda^2 + 2\lambda = 0 = 2\lambda(\lambda + 1)$ , obtenemos  $\lambda = 0$  y  $\lambda = -1$ .

Si  $\lambda \neq 0$  y  $\lambda \neq -1$ ,  $\det(A) = |A| \neq 0$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si  $\lambda = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ A y } A^* \text{ tienen el mismo rango porque la última columna de } A^* \text{ es}$$

de ceros.

En  $A$  como  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$  de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si  $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En  $A$  como  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2$ .

En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} F_2 - F_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ , por tener dos filas iguales, tenemos  $\text{rango}(A) = 2$ .

Como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$  de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

(b)

Resuélvelo para  $\lambda = 0$  y  $\lambda = -1$ .

Para  $\lambda = 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2$ , por tanto sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de  $A$  distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 3ª).

$$x - y = 0$$

$-x - y = 0$ .  $E_2 - E_1 \rightarrow -2x = 0$ , de donde  $x = 0$  e  $y = 0$ . Tomamos  $\mathbf{z} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}$ , con lo cual la solución del sistema es  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{a})$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

Para  $\lambda = -1$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2$ , por tanto sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de  $A$  distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$$x - y = -1$$

$-2y - z = -1$ . Tomamos  $\mathbf{y} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}$ , con lo cual  $x = -1 + a$  y  $z = 1 - 2a$ , y la solución del sistema es  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (-1 + \mathbf{a}, \mathbf{a}, 1 - 2\mathbf{a})$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

**ejercicio 4 opción B, Septiembre 2012**

[2'5 puntos] Halla el punto simétrico de  $P(2,1,-5)$  respecto de la recta  $r$  definida por

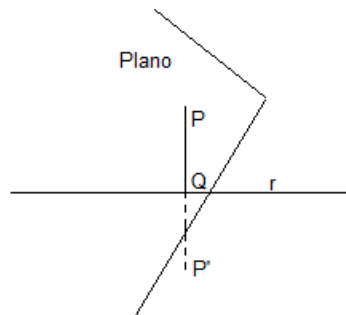
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

**Solución**

Simétrico de  $P(2,1,-5)$  respecto de la recta  $r$ :  $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$ .

De la recta tomo un punto, hacemos  $x = 0$  y resulta  $z = 0$  e  $y = -2$ , el punto sería  $A(0,-2,0)$  y un vector director  $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \{\text{producto vectorial de los vectores normales de cada plano que forman la recta}\} =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \vec{i}(1) - \vec{j}(1) + \vec{k}(1) = (1, -1, 1). \text{ La recta en vectorial es } (x, y, z) = (0, -2, 0) + \lambda(1, -1, 1).$$



Trazamos el plano " $\pi$ " perpendicular a la recta " $r$ " (su vector normal  $\mathbf{n}$  puede ser el vector director de la recta, es decir  $\mathbf{n} = \mathbf{u} = (1, -1, 1)$  que pase por el punto  $P(2,1,-5)$ . Calculamos el punto  $Q$  intersección de la recta con el plano. El punto  $Q$  es el punto medio del segmento  $PP'$  donde  $P'$  es el simétrico buscado.

Un plano paralelo al pedido es  $x - y + z + K = 0$ . Como pasa por el punto  $P(2,1,-5)$  tenemos  $2 - 1 - 5 + K = 0$ , de donde  $K = 4$  y el plano " $\pi$ " es  $x - y + z + 4 = 0$ .

Ponemos la recta " $r$ " en paramétricas para sustituirla en el plano. " $r$ ":  $(x, y, z) = (\lambda, -2 - \lambda, \lambda)$ .

Sustituimos " $r$ " en " $\pi$ "

$$(\lambda) - (-2 - \lambda) + (\lambda) + 4 = 0 = 6 + 3\lambda = 0, \text{ de donde } \lambda = -2 \text{ y el punto } Q \text{ es } Q((-2), -2 - (-2), (-2)) = Q(-2, 0, -2)$$

$Q$  es el punto medio del segmento  $PP'$ , es decir  $(-2, 0, -2) = ((2+x)/2, (1+y)/2, (-5+z)/2)$ .

Igualando tenemos

$$-2 = (2+x)/2, \text{ de donde } x = -4 - 2 = -6$$

$$0 = (1+y)/2, \text{ de donde } y = 0 - 1 = -1$$

$$-2 = (-5+z)/2, \text{ de donde } z = -4 + 5 = 1$$

El punto simétrico pedido es  $P'(x, y, z) = P'(-6, -1, 1)$