ANDALUCÍA JUNIO 2004

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción A o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la Opción B.
c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calcula el valor de la integral

$$\int_{-1}^{3}(x^2+5)e^{-x}dx$$

[2.5 PUNTOS]

Solución:

$$\int (x^2+5)e^{-x}dx = \int x^2e^{-x}dx + \int 5e^{-x}dx$$

$$\int x^2e^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$\int 5e^{-x}dx = -5e^{-x} + C$$

$$\int (x^2+5)e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} - 5e^{-x} + C = e^{-x}(-x^2-2x-7)+C$$

$$\int_{-1}^{3}(x^2+5)e^{-x}dx = \left[e^{-x}(-x^2-2x-7)\right]_{-1}^{3} = -22e^{-3}+6e$$

Ejercicio 2. Sea f la función definida para $x \neq -2$ por

$$\frac{x^2}{x+2}$$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f. **[1 PUNTO]**

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos locales de f. **[1 PUNTO]**

c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f. **[0.5 PUNTOS]**

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

$a)$

$$As\acute{\imath}ntota\ vertical: \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2}{x+2} = \infty \end{cases} \Rightarrow x = -2$$

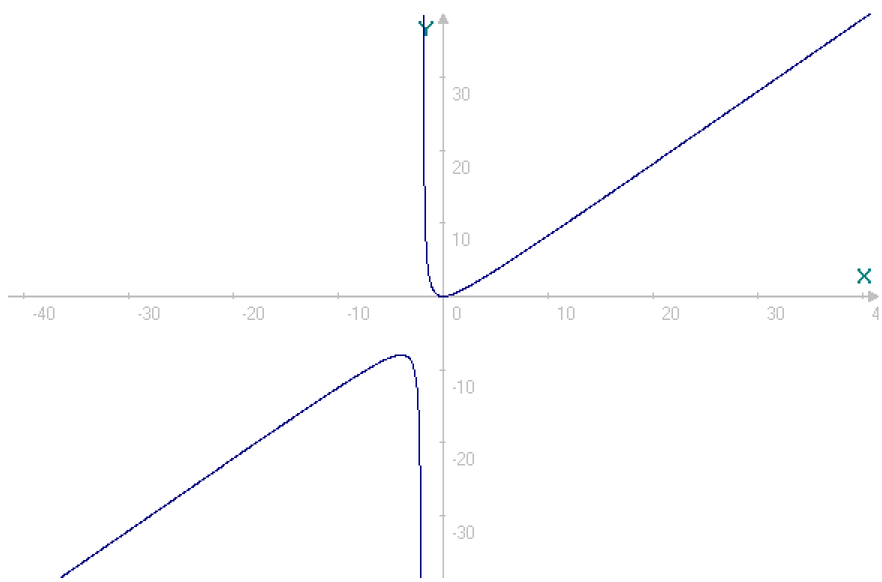
$$As\acute{\imath}ntota\ obl\acute{\imath}cua: \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \frac{x^2}{x^2+2x} = 1;\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+2} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x}{x+2} = -2 \Rightarrow y = x - 2$$

$b)$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = -4 \Rightarrow \begin{cases} x \in (-4,-2) \cup (-2,0) \Rightarrow Decrece \\ x \in (-\infty,-4) \cup (0,\infty) \Rightarrow Crece \end{cases}$$

$$M\acute{a}ximo\ (-4,-8)\ y\ m\acute{\imath}nimo\ (0,0)$$

$c)$



Ejercicio 3. Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y+z=0 \\ \lambda x+y+z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$

[2.5 PUNTOS]

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix};\ |A|=3\lambda-2-\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda=1;\ \lambda=1;\ \lambda=-2$$

$$Si\ \lambda=1 \Rightarrow Rg(A)=1<3=n^{o}\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$x+y+z=0 \Rightarrow \begin{cases} z=t \\ y=s \\ x=-s-t \end{cases}$$

$$Si\ \lambda=-2 \Rightarrow Rg(A)=2<3=n^{o}\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^{a}\,Fila+2\cdot 1^{a}\,Fila \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3^{a}\,Fila-1^{a}\,Fila \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3^{a}\,Fila-2^{a}\,Fila \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -3y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow z=t;\ y=t;\ x=t$$

$$Si\ \lambda\neq 1\ y\ \lambda\neq -2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado \Rightarrow x=0;\ y=0;\ z=0$$

Ejercicio 4. Halla las coordenadas del punto simétrico $P=(1,2,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x+2y+z-7=0$.

[2.5 PUNTOS]

Solución:

Hacemos la recta perpendicular al plano que pasa por P: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=-2+t \end{cases}$ y calculamos la intersección de esta recta con el plano

$$3(1+3t)+2(2+2t)-2+t-7=0 \Rightarrow 3+9t+4+4t-2+t-7=0 \Rightarrow t=\frac{1}{7}$$

$$x=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7};\ y=2+\frac{2}{7}=\frac{16}{7};\ z=-2+\frac{1}{7}=\frac{-13}{7} \Rightarrow M=\left(\frac{10}{7},\frac{16}{7},-\frac{13}{7}\right) \textit{ punto medio de P y Q}$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{10}{7} \Rightarrow x=\frac{13}{7};\ \frac{y+2}{2}=\frac{16}{7} \Rightarrow y=\frac{18}{7};\ \frac{z-2}{2}=\frac{-13}{7} \Rightarrow z=-\frac{12}{7}$$

$$Q\left(\frac{16}{7},\frac{18}{7},-\frac{12}{7}\right)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2h. y las 6h. de la tarde viene dada por

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \ \ para \ t \in [2,6]$$

a) ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta. **[1.25 PUNTOS]**
b) ¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta. **[1.25 PUNTOS]**

Solución:

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8 \ \ para \ t \in [2,6]$$

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72 = 0 \Rightarrow t = 6;\ t = 4; \Rightarrow \begin{cases} Si \ t \in (4,6) \ decrece \\ si \ t \in (2,4) \ crece \end{cases}$$

$$Máximo \ a \ las \ 4h. \ y \ mínimo \ a \ las \ 6h.$$

Ejercicio 2. Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=6-x^2,\ g(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$$

a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g. **[1 PUNTO]**

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior. **[1.5 PUNTOS]**

Solución:

a)

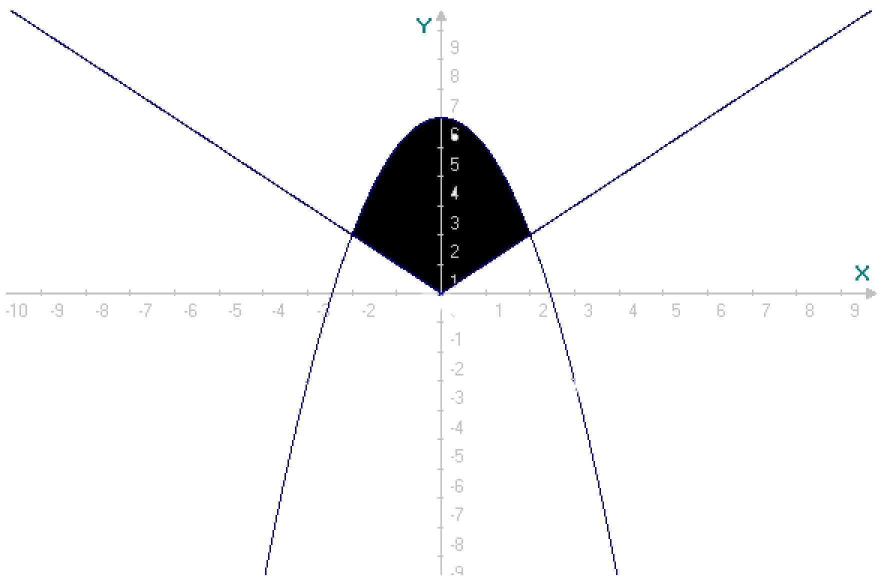
$$f(x)=6-x^2$$

$$Puntos\ de\ corte:\begin{cases} x=0\Rightarrow y=6\Rightarrow (0,6) \\ y=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}\Rightarrow (\sqrt{6},0);\ (-\sqrt{6},0)\end{cases}$$

$$f'(x)=-2x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow\begin{cases} x\in(0,\infty)\ decrece \\ x\in(-\infty,0)\ crece\end{cases}\Rightarrow (0,6)\ máximo$$

$$f''(x)=-2\ cóncava$$

$$g(x)=|x|=\begin{cases} x \quad si\ x\geq 0 \\ -x\ si\ x<0\end{cases}\Rightarrow se\ trata\ de\ dos\ rectas$$



b)

$$Los\ puntos\ de\ corte\ son\ x=-2\ y\ x=2$$

$$\int_{-2}^{0}6-x^2+xdx=\left[6x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}=12-\frac{8}{3}-2=\frac{22}{3}$$

$$A=\frac{22}{3}\cdot 2=\frac{44}{3}\ u^2\ \ por\ simetría$$

Ejercicio 3. Resuelve la ecuación matricial: $A^2 \cdot X = 2B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

[2.5 PUNTOS]

Solución:

$$\left(A^2\right)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot 2B \Rightarrow X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot 2B$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^2\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 2^a\, Fila - 4 \cdot 1^a\, Fila \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 1^a\, Fila + 2 \cdot 2^a\, Fila \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} -1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-1^a\, Fila \ y \ -2^a\, Fila \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 & 26 \\ 4 & -1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (-1,2,1).

[2.5 PUNTOS]

Solución:

El vector $\overrightarrow{OP} = (-1,2,1)$ será normal al plano luego será $-x + 2y + z + d = 0$. Además sabemos que contiene al punto P(-1,2,1)

$$-1 + 4 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -4 \Rightarrow \pi : -x + 2y + z - 4 = 0$$