

**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2011-2012.**

Opción A

Ejercicio 1, Opción A, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] Se considera la función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Calcula los valores de a y b .

Solución

Si f es derivable, f es continua; en particular es continua y derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(x-2)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-b}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-a}{(x-2)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-b}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como f es continua en $x = 1$, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(a + \frac{b}{\sqrt{x}} \right) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{a}{x-2} \right) = 1 - a. \text{ Igualando } a + b = 1 - a, \text{ de donde } 2a + b = 1.$$

Como f es derivable en $x = 1$, $f'(1^+) = f'(1^-)$. Vemos la continuidad de la derivada.

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-b}{2x\sqrt{x}} \right) = -b/2$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-a}{(x-2)^2} \right) = -a. \text{ Igualando } -a = -b/2, \text{ de donde } b = 2a.$$

$$b = 2a, \text{ de donde } 2a + 2a = 4a = 1 \rightarrow a = 1/4 \text{ y } b = 1/2.$$

Ejercicio 2, Opción A, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(-1, 0)$.

Solución

Una primitiva de $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ es $F(x) = I = \int (1 - x^2)e^{-x} dx = \{ \text{Integral por partes por partes } \int u dv = uv - \int v du. \text{ En nuestro caso } u = 1 - x^2 \text{ y } dv = e^{-x} dx, \text{ de donde } du = -2x dx \text{ y } v = \int dv = \int e^{-x} = -e^{-x} \} = (1 - x^2)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(-2x dx) = -(1 - x^2)e^{-x} - 2 \int x e^{-x} = -(1 - x^2)e^{-x} - 2I_1$

$I_1 = \int x e^{-x} dx = \{ \text{Integral por partes por partes, en nuestro caso } u = x \text{ y } dv = e^{-x} dx, \text{ de donde } du = dx \text{ y } v = -e^{-x} \} = -x \cdot e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$, por tanto

$$F(x) = I = \int (1 - x^2)e^{-x} dx = -(1 - x^2)e^{-x} - 2I_1 = -(1 - x^2)e^{-x} - 2(-x \cdot e^{-x} - e^{-x}) + K = e^{-x}(x^2 + 2x + 1) + K$$

Como pasa por $(-1, 0)$, $F(-1) = 0 \rightarrow e(1 - 2 + 1) + K = 0 = 0 + K = 0$, de donde $K = 0$ y la primitiva pedida es $F(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$

Ejercicio 3, Opción A, Modelo 6 de 2012.

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

(a) [1'25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora?

Razona las respuestas.

(b) [1'25 puntos] Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Solución

$x = \text{libro}; y = \text{calculadora} \text{ y } z = \text{estuche}$

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche.

Traducción $x + y + z = 57\text{€}$.

Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

Traducción $x = 2(y + z)$

(a)

¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

Como tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas

$x + y + z = 57\text{€}$.

$x = 2(y + z)$, tenemos un sistema compatible e indeterminado que tiene infinitas soluciones.

Juan Carlos Schiemann Correia, me envió la solución de que si se puede saber el precio del libro pero no el de la calculadora:

De $x = 2(y + z)$, tenemos $x/2 = y + z$, y entrando en la 1ª ecuación resulta $x + x/2 = 57$, de donde $3x/2 = 57$ y nos sale **$x = 38\text{€}$** .

(b)

Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Traducción $0'5x + 0'8y + 0'75z = 34 \text{ €}$

Sustituimos $x = 2(y + z)$, en las otras dos ecuaciones:

$$2(y + z) + y + z = 57 \rightarrow 3y + 3z = 57 \rightarrow y + z = 19 \rightarrow y = 19 - z$$

$$0'5 \cdot 2(y + z) + 0'8y + 0'75z = 34 \rightarrow 1'8y + 1'75z = 34 \rightarrow 1'8(19 - z) + 1'75z = 34 \rightarrow 34'2 - 0'05z = 34,$$

de donde $z = 4 \text{ €}$, $y = 19 - 4 = 15 \text{ €}$ y $x = 2(19) = 38 \text{ €}$.

Luego un libro vale $x = 38 \text{ €}$, una calculadora $y = 15 \text{ €}$ y un estuche $z = 4 \text{ €}$.

Ejercicio 4, Opción A, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] Determina el punto P de la recta $r \equiv (x+3)/2 = (y+5)/3 = (z+4)/3$ que equidista del origen de coordenadas y del punto A(3, 2, 1).

Solución

Ponemos la recta en paramétricas $r \equiv (x+3)/2 = (y+5)/3 = (z+4)/3 = \lambda \in \mathbb{R}$, de donde

$$x = -3 + 2\lambda$$

$$y = -5 + 3\lambda$$

$$z = -4 + 3\lambda.$$

Un punto genérico de la recta "r" es $P(x,y,z) = P(-3 + 2\lambda, -5 + 3\lambda, -4 + 3\lambda)$.

Me dicen que $d(O,P) = d(A,P)$, es decir $\|OP\| = \|AP\|$

$$OP = (-3 + 2\lambda, -5 + 3\lambda, -4 + 3\lambda) \rightarrow \|OP\| = \sqrt{(-3+2\lambda)^2 + (-5+3\lambda)^2 + (-4+3\lambda)^2} = \sqrt{22\lambda^2 - 66\lambda + 50}$$

$$AP = (-3 + 2\lambda - 3, -5 + 3\lambda - 2, -4 + 3\lambda - 1) = (-6 + 2\lambda, -7 + 3\lambda, -5 + 3\lambda)$$

$$\rightarrow \|AP\| = \sqrt{(-6+2\lambda)^2 + (-7+3\lambda)^2 + (-5+3\lambda)^2} = \sqrt{22\lambda^2 - 96\lambda + 110}.$$

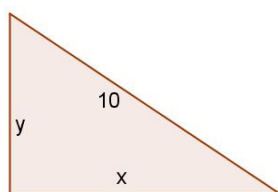
Igualando y elevando al cuadrado tenemos $22\lambda^2 - 66\lambda + 50 = 22\lambda^2 - 96\lambda + 110 \rightarrow 30\lambda = 60$, de donde tenemos $\lambda = 2$, y **el punto es** $P(-3 + 2(2), -5 + 3(2), -4 + 3(2)) = P(1, 1, 2)$.

Opción B

Ejercicio 1, Opción B, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

Solución



Función a optimizar = Área = $(1/2)xy$

Relación $y^2 + x^2 = 10^2$, de donde $y = \sqrt{100 - x^2}$, es (+) puesto que es una longitud.

Mi función es $A(x) = (1/2)x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

El máximo anula la 1ª derivada $A'(x)$

$$A'(x) = (1/2) \cdot \sqrt{100 - x^2} + (1/2)x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

De $A'(x) = 0$, tenemos $50 - x^2 = 0$, de donde $x = +\sqrt{50}$, pues es una longitud.

Las dimensiones del triángulo son $x = +\sqrt{50}$ e $y = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = \sqrt{50}$, luego es un triángulo isósceles.

Veamos que es un máximo, es decir $A(\sqrt{50}) < 0$.

$$A'(x) = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$A''(x) = \frac{-2x \cdot \sqrt{100 - x^2} - (100 - x^2) \cdot (\sqrt{100 - x^2})'}{(\sqrt{100 - x^2})^2}$$

$$A''(\sqrt{50}) = \frac{-2\sqrt{50} \cdot \sqrt{50} - (0) \cdot (\sqrt{100 - x^2})'}{(+)} < 0, \text{ luego es máximo.}$$

Ejercicio 2, Opción B, Modelo 6 de 2012.

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ respectivamente.

(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ respectivamente.

(a)

Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto que limitan.

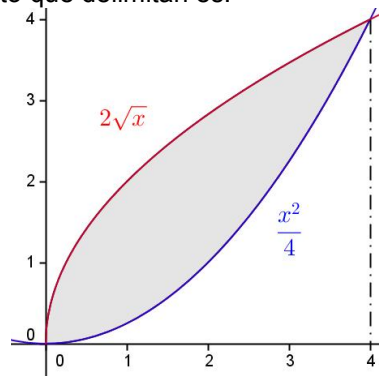
La gráfica de $f(x) = x^2/4$ es parecida a la de x^2 (vértice (0,0), ramas hacia arriba), pero un poco más abierta pues para $x = 1$ vale $1/4$.

La gráfica de $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ es parecida a la de $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ (también es una parábola, pero horizontal en este caso), pero un poco más alargada pues para $x = 1$ vale 2.

Los corte los calculamos resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir $x^2/4 = 2 \cdot \sqrt{x}$. Elevando al cuadrado

tenemos $x^4/16 = 4x$, luego $x^4 = 64x \rightarrow x^4 - 64x = x(x^3 - 64) = 0$, de donde $x = 0$ y $x = \sqrt[3]{64} = 4$

Un esbozo de sus gráficas y del recinto que delimitan es:



(b)

Calcula el área de dicho recinto.

$$\text{Área} = \int_0^4 [(2\sqrt{x}) - (x^2/4)] dx + \int_0^4 [(2x^{1/2}) - (x^2/4)] dx = [2x^{1/2+1}/(1/2+1) - x^3/12]_0^4 = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3} - x^3/12 \right]_0^4 =$$

$$= \frac{4\sqrt{4^3}}{3} - 4^3/12 - (0) = \frac{16\sqrt{4}}{3} - \frac{64}{12} = \frac{16\sqrt{4}}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16(\sqrt{4} - 1)}{3} \cong 5'33 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 3, Opción B, Modelo 6 de 2012.

Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$$

- (a) [1 punto] Clasifica el sistema según los valores del parámetro k .
 (b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $k = 1$.
 (c) [0'75 puntos] Resuélvelo para $k = -1$.

Solución

(a)
 Clasifica el sistema según los valores del parámetro k .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = (0) - (1)(-2k) + (2)(k-2) = 2k + 2k - 4 = 4k - 4 \neq 0,$$

Resolviendo la ecuación $4k - 4 = 0 =$, obtenemos $k = 1$.

Si $k \neq 1$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

(b)
 Resuélvelo para $k = 1$.

$$\text{Si } k = 1 \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$. Como $\text{rango}(A) = 2 =$

$\text{rango}(A^*) = 2$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones; la 2ª y la 3ª (con las que hemos formado el menor distinto de 0 de A).

$$2x + y = 1$$

$$y + 2z = 1. \text{ Tomando } z = a \in \mathbb{R}, \text{ tenemos } y = 1 - 2a, \text{ con lo cual } x = 1/2 - 1/2 + 2a/2 = a.$$

La solución del sistema es $(x, y, z) = (a, 1 - 2a, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

(c)

Resuélvelo para el caso $k = -1$.

Ya hemos visto en el apartado (a) que si $k \neq 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

$$x + y - z = 1$$

$$2x - y = 1. \text{ Cambio } F_2 \text{ por } F_3$$

$$y + 2z = -1$$

tenemos que $y = 0, z = -1/2$ y $x = 1 - 1/2 = 1/2$.

La solución del sistema es $(x, y, z) = (1/2, 0, -1/2)$.

$$x + y - z = 1$$

$$y + 2z = -1$$

$$2x - y = 1. F_3 + F_1(-2)$$

$$x + y - z = 1$$

$$y + 2z = -1$$

$$-3y + 2z = -1. F_3 + F_2(-1)$$

$$x + y - z = 1$$

$$y + 2z = -1$$

$$-4y = 0, \text{ luego}$$

Ejercicio 4, Opción B, Modelo 6 de 2012.

Considera el punto $P(1, 0, 2)$ y la recta r dada por las ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

- (a) [1 punto] Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .

(b) [1'5 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

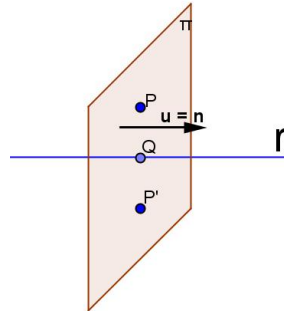
Solución

Considera el punto P(1,0, 2) y la recta r dada por las ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

(a)

Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

Utilizamos un mismo dibujo para los dos apartados



El plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta "r" tiene como vector normal \mathbf{n} el vector director de la recta \mathbf{v} . El plano tiene de ecuación $\pi \equiv \mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde \cdot es el producto escalar y X es un punto genérico del plano.

Un vector director \mathbf{w} lo sacamos como producto vectorial (\times) de los vectores normales que determinan dicha recta.

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2) - \vec{j}(4) + \vec{k}(2) = (-2, -4, 2). \text{ Otro mas sencillo es } \mathbf{v} = (-1, -2, 1) = \mathbf{n}$$

P(1,0, 2)

El plano pedido es $\pi \equiv \mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0 = (x-1, y, z-2) \cdot (-1, -2, 1) = -x+1-2y+z-2 = -x-2y+z-1 = 0$

(b)

Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Para calcular el punto simétrico de P respecto a la recta "r", calculamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta "r", ya calculado en el apartado (a) que es $\pi \equiv -x-2y+z-1 = 0$

Calculamos el punto Q intersección perpendicular de la recta "r" con el plano π , y tenemos en cuenta que Q es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico buscado.

$Q = r \cap \pi$

Ponemos la recta en paramétricas, por lo cual necesitamos un punto A de ella
$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Tomando $y = 0$, sale $x = 2$ y $z = 4$, El punto es A(2,0,4). Su vector director era $\mathbf{v} = (-1, -2, 1)$.

Un punto genérico "r" es $(2-b, -2b, 4+b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

Entramos en $\pi \rightarrow -(2-b) - 2(-2b) + (4+b) - 1 = 0 = b+4b+b-2+4-1 = 6b + 1 = 0$, de donde $b = -1/6$ y el punto Q es $Q(2 - (-1/6), -2(-1/6), 4 + (-1/6)) = Q(13/6, 2/6, 23/6)$

Q es punto medio del segmento PP' $\pi \rightarrow (13/6, 2/6, 23/6) = ((1+x)/2, (0+y)/2, (2+z)/2)$. Igualando:

$$13/6 = (1+x)/2, \text{ de donde } x = 13/3 - 1 = 10/3$$

$$2/6 = (0+y)/2, \text{ de donde } z = 2/3 - 0 = 2/3$$

$$23/6 = (2+z)/2, \text{ de donde } z = 23/3 - 2 = 17/3$$

El simétrico buscado es P'(10/3, 2/3, 17/3)