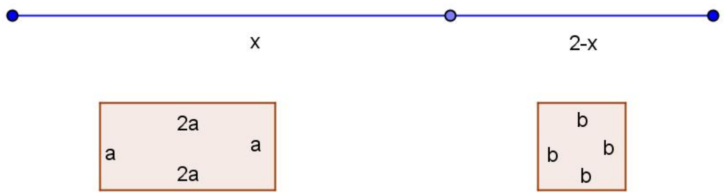
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2011-2012.

Opción A

Ejercicio 1, Opción A, Modelo 5 de 2012.

[2'5 puntos] Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado.
Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.

Solución



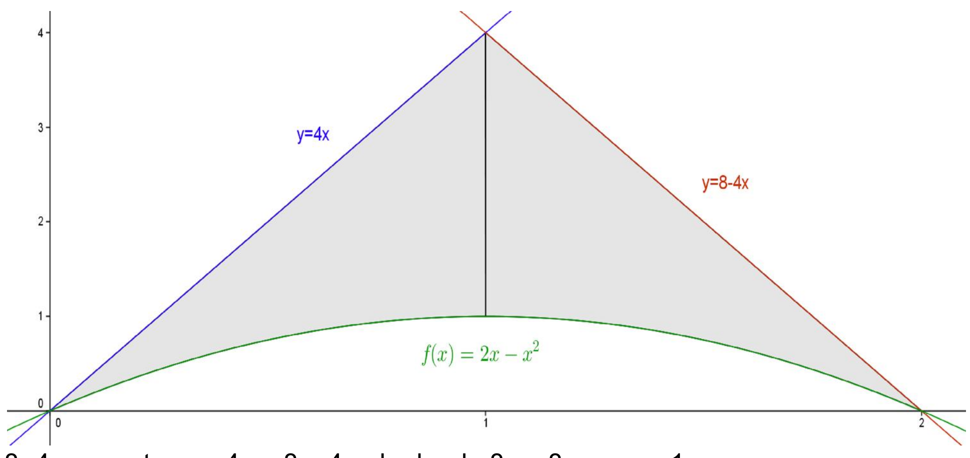
Función a optimizar Área = área rectángulo + área cuadrado = $2a^2 + b^2$
Relaciones: perímetro: $6a = x \rightarrow a = x/6$; $4b = 2 - x \rightarrow b = (2 - x)/4$.
Mi función $A(x) = 2(x^2/36) + (2 - x)^2/16$
El mínimo anula $A'(x)$
$A'(x) = 4x/36 - 2(-1)(2 - x)/16$,
De $A'(x) = 0 \rightarrow x/9 -2(2 - x)/16 = 0 \rightarrow x/9 = (2 - x)/8 \rightarrow 8x = 18 - 9x \rightarrow 17x = 18 \rightarrow x = 18/17$ m.
Veamos que es mínimo $A''(x) = 4/36 + 2/16 > 0$, luego es mínimo independientemente del valor de "x"
Dimensiones pedidas: $x = 18/17$ m. y $2 - x = 2 - 18/17 = 16/17$ m.

Ejercicio 2, Opción A, Modelo 5 de 2012.

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.
(a) [0'5 puntos] Realiza un esbozo de dicho recinto.
(b) [2 puntos] Calcula su área.

Solución

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.
(a)
Realiza un esbozo de dicho recinto.
$y = 4x$ es una recta, con dos valores basta, el (0,0) y el (1,4)
$y = 8 - 4x$ es una recta, con dos valores basta, el (1,4) y el (2,0)
$f(x) = 2x - x^2$ es unaparábola con las ramas hacia abajo, corte con los eje en (0,0) y (2,0), y abscisa de su vértice en la soluuxió de $f'(x) = 0 = 2 - 2x \rightarrow x = 1$, luego V(1,1).
Un esbozo de las gráficas es el siguiente: (Veremos las abscisas donde se cortan para el área)



$y = 4x$ e $y = 8 -4x$ se cortan en $4x = 8 - 4x$, de donde $8x = 8$. $\rightarrow x = 1$.
$y = 4x$ y $f(x) = 2x - x^2$ se cortan en $4x = 2x - x^2$. Las soluciones de $x^2 + 2x = 0$ son $x = 0 \rightarrow x = -2$.
$y = 8 - 4x$ e $y = 2x - x^2$ se cortan en $8 - 4x = 2x - x^2$, de donde $x^2 - 6x +8 =0$. Sus soluciones son x=2 y x=4.
Como sólo me lo piden en el primer cuadrante, nos interesan las abscisas $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

(b)
Calcula su área.
Área = $\int_0^1 [(4x)-(2x-x^2)]dx + \int_1^2 [(8-4x)-(2x-x^2)]dx = \int_0^1 [2x+x^2]dx + \int_1^2 [x^2 - 6x + 8]dx =$
$= [x^2 + x^3/3]_0^1 + [x^3/3 - 3x^2 + 8x]_1^2 = [(1+1/3)-(0)] + [(8/3-12+16) - (1/3-3+8)] =$
$= 4/3 + 20/3 -16/3 = 8/3\ u^2$.

Ejercicio 3, Opción A, Modelo 5 de 2012.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ky + 2z = k + 1 \\ x + 2y + kz = 3 \\ (k+1)x + y + z = k + 2 \end{cases}$$

(a) [1'25 puntos] Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.
(b) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de k para el cual el sistema no tiene solución?
(c) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para k = 0.

Solución

(a) y (b)
Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & k+1 \\ 1 & 2 & k & 3 \\ k+1 & 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (1)(2-k) - (k)(1-k^2-k) + (2)(1-2k-2) = 2-k-k+k^3+k^2-2-4k = k^3+k^2-6k = k(k^2+k-6)$

Resolviendo la ecuación $k(k^2+k-6) = 0$, tenemos k = 0, y de $k^2+k-6 = 0$ obtenemos k = -3 y k = 2.

Si **k ≠ 0, k ≠ -3 y k ≠ 2**, det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **k = -3**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (1)(-5) - (-3)(5) + (-2)(5) = -5 + 15 -10 = 0$, tenemos rango($A^*$) = 2.

Como rango(A) = 2 = rango(A^*), **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si **k = 2**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales tenemos rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si **k = 0**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(1) - 0 + (1)(-1) = 0$, tenemos rango($A^*$) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Por tanto para k = -3, k = 0 y k = 2, el sistema tiene más de una solución.

(c)

Resuelve el sistema para k = 0.

Hemos visto en el apartado anterior que si **k = 0**, rango(A) = rango(A^*) = 2, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$x + 2z = 1$

$x + 2y = 3$. Tomo **x = a** $\in$ R, con lo cual tenemos z = 1/2 – a/2 e y = 3/2 – a/2, con a $\in$ R.

La solución del sistema es (x,y,z) = (a, 3/2 – a/2, 1/2 – a) con a $\in$ R.

Ejercicio 4, Opción A, Modelo 5 de 2012.

Se consideran los vectores **u** = (k, 1, 1); **v** = (2, 1, -2) y **w** = (1, 1, k), donde k es un número real.

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de k para los que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes.

(b) [1 punto] Determina los valores de k para los que **u** + **v** y **v** – **w** son ortogonales.

(c) [0'75 puntos] Para k = -1, determina aquellos vectores que son ortogonales a **v** y **w** y tienen módulo 1.

Solución

Se consideran los vectores **u** = (k, 1, 1); **v** = (2, 1, -2) y **w** = (1, 1, k), donde k es un número real.

(a)

Determina los valores de k para los que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes.

Los vectores son linealmente dependientes si su determinante es cero.

$\det(\mathbf{u};\mathbf{v};\mathbf{w}) = 0 = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1(-1) \\ F_3+F_1(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2-k & 0 & -3 \\ 1-k & 0 & k-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ C_3+C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1+k \\ 2-k & 0 & -1-k \\ 1-k & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = -(1)(0 - (-1-k)(1-k)) =$

$= (-1-k)(1-k) = k^2 - 1 = 0$, **luego k = ± 1 para que los vectores sean dependientes.**

(b)

Determina los valores de k para los que **u** + **v** y **v** – **w** son ortogonales.

Los vectores son ortogonales si su producto escalar (•) es cero.

u + **v** = (k, 1, 1) + (2, 1, -2) = (k+2, 2, -1)

v – **w** = (2, 1, -2) - (1, 1, k) = (1, 0, -2-k)

(**u** + **v**)•(**v** – **w**) = (k+2, 2, -1) •(1, 0, -2-k) = 0 = k+2 + 0 + k+2 = 2k+4 = 0, de donde **k = -2 para que sean ortogonales.**

(c)

Para k = -1, determina aquellos vectores que son ortogonales a **v** y **w** y tienen módulo 1.

El vector perpendicular a la vez a **v** y **w** es su producto vectoiral (x).

v = (2, 1, -2) y **w** = (1, 1, -1).

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(1) = (1,0,1).$$

Como me dicen que el vector sea unitario dividimos dicho vector por su módulo || **v** x **w** || = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
El vector pedido es $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$.

Opción B

Ejercicio 1, Opción B, Modelo 5 de 2012.

Sea la función f : R → R definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [1'5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = - 2.

Solución

Sea la función f : R → R definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a)
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
Me piden la monotonía es decir el estudio de la 1ª derivada.
$f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{2x+3 - (x^2+3x+3)}{x^2+3x+3} = \frac{-x^2 - x}{x^2+3x+3}.$$

De $f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 - x = 0 = x(-x-1)$, de donde x = 0 y x = -1, que serán los posibles extremos relaticos.
Como f'(-2) = -2/(+) < 0, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (-∞,-1).
Como f'(-0'1) = (-0'1)(-0'9)/(+) > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (-1,0).
Como f'(1) = -2/(+) < 0, f es estrictamente decreciente en $(\searrow)$ (0,+∞).
Por definición x = -1 es un mínimo relativo y vale f(-1) = ln(1) + 1 = 1.
Por definición x = 0 es un máximo relativo y vale f(0) = ln(3) + 0 = ln(3).
(b)
Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = - 2.
La ecuación de la recta normal en x = -2 es " y – f(-2) = [-1/f'(-2)]·(x + 2) "
$f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x \rightarrow f(-2) = \ln(1) - (-2) = 2$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x}{x^2+3x+3}. \qquad \rightarrow f'(-2) = (-2)/1 = -2$$

La ecuación de la recta normal en x = -2 es " y – 2 = (1/2)·(x + 2) "

Ejercicio 2, Opción B, Modelo 5 de 2012.

[2'5 puntos] Calcula los valores de a y b sabiendo que la función f : (0;+∞) → R definida por $f(x)=ax^2 + b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en x = 1 y que $\int_1^4 f(x)dx = 2 - 8\ln(4)$.

Solución

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función f : (0;+ ∞) → R definida por $f(x) = ax^2 + b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en x = 1 y que $\int_1^4 f(x)dx = 27 - 8\ln(4)$.
Como tiene un extremo relativo en x = 1, tenemos f'(1) = 0
$f(x) = ax^2 + b\ln(x)$
f'(x) = 2ax + b/x, de donde f'(1) = 0 nos dá 2a + b = 0, luego **b = -2a**.
Nuestra función es $f(x) = ax^2 - 2a\ln(x)$
De $\int_1^4 f(x)dx = 27 - 8\ln(4)$, tenemos $\int_1^4 (ax^2 - 2a\ln(x))dx = 27 - 8\ln(4) = \{**\} = [ax^3/3 - 2a(x\cdot\ln x - x)]_1^4 =$
= (64a/3 – 2a(4·ln(4) – 4) – (a/3 -2a(0-1)) = 64a/3 – 8a·ln(4) + 8a – a/3 + 2a = 27a – 8a·ln(4), de donde obtenemos que **a = 1** y **b = -2**.

Ejercicio 3, Opción B, Modelo 5 de 2012.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.
(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

Solución

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que AB = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

(a)
Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.
A tiene inversa si det(A) $\neq$ 0

det(A) = $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ = 3 + 10 = 13 $\neq$ 0, luego A tiene inversa.

Sabemos que det(A·B) = det(A)·det(B), si A y B son matrices cuadradas de igual orden.

det(A·B) = det(A)·det(B) = 13·det(B) = $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ = -6 - 7 = -13, de donde det(B) = -13/13 = -1 $\neq$ 0, luego B tiene inversa.

(b)
Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.
Multiplicamos la expresión anterior por A por la izquierda

$AA^{-1}X - AB = ABA$, de donde X = AB + ABA = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 36 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 43 & -9 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4, Opción B, Modelo 5 de 2012.

[2'5 puntos] Encuentra los puntos de la recta $r \equiv (x-1)/4 = (2-y)/2 = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.

Solución

Ponemos la recta en paramétricas recta $r \equiv (x-1)/4 = (2-y)/2 = z-3 = \lambda \in R$, de donde
$x = 1 + 4\lambda$
$-y = -2 + 2\lambda$, luego $y = 2 - 2\lambda$,
$z = 3 + \lambda$.
Un punto genérico de la recta "r" es $X(x,y,z) = X(1 + 4\lambda, 2 - 2\lambda, 3 + \lambda)$.
Le imponemos a este punto que su distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z – 1 = 0$ sea 4 u.

$d(X, \pi) = \dfrac{|(1+4\lambda) - 2(2-2\lambda) + 2(3+\lambda) - 1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{|2 + 10\lambda|}{3} = 4$, de donde $|2 + 10\lambda| = 12$, que nos dan lugar a dos ecuaciones:

$+(2 + 10\lambda) = 12$, de donde $\lambda = 1$ y el punto es $X_1(1 + 4(1), 2 – 2(1), 3 + (1)) = X_1(5, 0, 4)$.
$+(2 + 10\lambda) = -12$, de donde $\lambda = -14/10 = -7/5$ y el punto es $X_2(1 + 4(-7/5), 2 – 2(-7/5), 3 + (-7/5)) =$
$= X_2(-23/5, 24/5, 8/5)$.

Luego hay dos puntos el $X_1(5, 0, 4)$ y el $X_2(-23/5, 24/5, 8/5)$.