

**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2011-2012.**

Opción A

Ejercicio 1, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Sea la función $f: [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

- (a) [0'75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 (b) [1 punto] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 (c) [0'75 puntos] Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.

Solución

Sea la función $f: [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) y (b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . Estudio de la 1ª derivada

$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$. Es continua y derivable en $(0, \infty)$, en particular en el intervalo dado.

$$f'(x) = 2x - 8/x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 8/x = 0 \rightarrow 2x = 8/x \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

$x = -2$ no está en el dominio, el posible extremo es $x = 2$.

Como $f'(1'5) = 2(1'5) - 8/1'5 \cong -2'3 < 0$, luego f es estrictamente decreciente en $(0, 2)$

Como $f'(2'5) = 2(2'5) - 8/2'5 \cong 1'8 > 0$, luego f es estrictamente creciente en $(2, e)$.

Por definición $x = 2$ es un mínimo relativo que vale $f(2) = 4 - 8\ln(2) \cong -1'54$

Como la función es derivable, a parte de $x = 2$, los extremos absolutos se pueden encontrar en $x=1$ y $x=e$ (los extremos del intervalo $[1, e]$)

$$f(1) = 1 - 0 = 1$$

$$f(e) = e^2 - 8\ln(e) \cong -0'61.$$

El máximo absoluto es "1" y se alcanza en $x = 1$.

El mínimo absoluto es " $4 - 8\ln(2)$ " y se alcanza en $x = 2$.

(c)

Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad. Estudio de la 2ª derivada.

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x).$$

$$f'(x) = 2x - 8/x$$

$$f''(x) = 2 + 8/x^2$$

De $f''(x) = 0 \rightarrow 2 + 8/x^2 = 0 \rightarrow 2x^2 = -8 \rightarrow x^2 = -4$, que no tiene solución, luego la función siempre es cóncava (\cap) o convexa (\cup).

Como $f''(2) = 2 + 2 = 4 > 0$, f es convexa (\cup) en $(1, e)$.

Ejercicio 2, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$

- (a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
 (b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
 (c) [1 punto] Calcula el área del recinto anterior.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$

(a)

Halla la ecuación de la recta tangente (R.T.) a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

La recta tangente en $x = 1$ es " $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ "

$$f(x) = x^3 - 4x \rightarrow f(1) = (1)^3 - 4(1) = -3.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \rightarrow f'(1) = 3(1)^2 - 4 = -1.$$

La recta tangente es $y + 3 = -1(x - 1) = -x + 1$, de donde la R.T. es " $y = -x - 2$ ".

(b)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

f es una cúbica y vemos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (nos lo dá el término de mayor grado, x^3), además $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Los cortes son:

Para $x = 0$, punto $(0, f(0)) = (0, 0)$

Para $f(x) = 0 \rightarrow 0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$, de donde $x = 0$ y $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$. Puntos $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

Igualamos f a la recta $y = -x - 2$ (observamos que es la recta tangente en $x = 1$, luego en $x = 1$ coinciden) para ver sus puntos de corte.

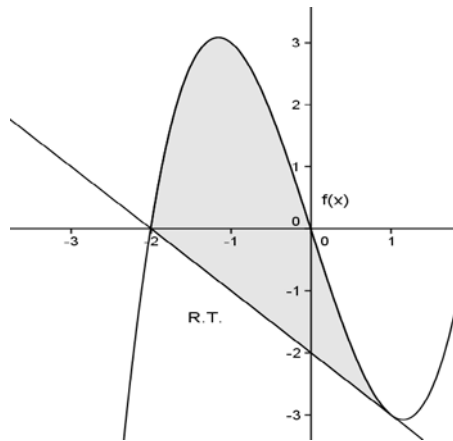
De $x^3 - 4x = -x - 2$, tenemos $x^3 - 3x + 2 = 0$. Utilizamos Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Vemos que $x = 1$, es una solución y resolviendo $x^2 + x - 2 = 0$ obtenemos $x = 1$ y $x = -2$, luego f y la recta $y = -x - 2$ se cortan en $x = 1$ (doble) y en $x = -2$.

$f(1) = (1)^3 - 4 = -3$ y $f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) = 0$

Para dibujar la recta $y = -x - 2$ necesitamos dos puntos, uno es $x = 1$, y sale $y = -3$. Punto $(1, -3)$ (coinciden f y recta tangente), otro puede ser $x = -2$ y obtenemos $y = 0$. Punto $(-2, 0)$. Con estos datos un esbozo de las gráficas y del recinto que limitan es:



(c)

Calcula el área del recinto anterior.

$$\text{Área} = \int_{-2}^1 [(x^3 - 4x) - (-x - 2)] dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = [x^4/4 - 3x^2/2 + 2x]_{-2}^1 = (1/4 - 3/2 + 2) - (16/4 - 6 - 4) = 27/4 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 3, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = 2 \\ x - 2y - z = k + 1 \end{cases}$$

(a) [1'75 puntos] Clasifícalo según los distintos valores de k .

(b) [0'75 puntos] Resuélvelo para el caso $k = 2$.

Solución

(a)

Clasifícalo según los distintos valores de k .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(1) - (k+1)(-k-1) + (2)(-2k-1) = 1 + (k^2 + 2k + 1) - 4k - 2 = k^2 - 2k \neq 0,$$

Resolviendo la ecuación $k^2 - 2k = 0 = k(k - 2)$, obtenemos $k = 0$ y $k = 2$.

Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos
segunda = $-0 + (1)(2) - (2)(-3) = 2 + 6 = 8 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$. Como

$\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si $k = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos
primera = $(1)(7) - (3)(4) + (-1)(-5) = 7 - 12 + 5 = 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

(b)

Resuélvelo para el caso $k = 2$.

Hemos visto en el apartado anterior que si $k = 2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$$x + 3y + 2z = -1$$

$$2x + y + z = 2. \text{ Tomo } \mathbf{z} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \text{ y a } Ec_2 + Ec_1(-2), \text{ con lo cual tenemos}$$

$$x + 3y + 2a = -1$$

$$-5y - 3a = 4, \text{ de donde } -4 - 3a = 5y, \text{ luego } y = -4/5 - 3a/5. \text{ Entrando en la primera ecuación tenemos}$$

$$x + 3(-4/5 - 3a/5) + 2a = -1, \text{ de donde } x = -1 + 12/5 + (+9/5 - 2)a = 7/5 - (1/5)a$$

La solución del sistema es $(x, y, z) = (7/5 - (1/5)a, -4/5 - (3/5)a, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4, Opción A, Modelo 2 de 2012.

Dadas la rectas $r \equiv (x+3)/-6 = (y-9)/4 = (z-8)/4$ y $s \equiv (x-3)/3 = (y-9)/-2 = (z-8)/-2$

(a) [1 punto] Determina la posición relativa de las rectas r y s .

(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre r y s .

Solución

Dadas la rectas $r \equiv (x+3)/-6 = (y-9)/4 = (z-8)/4$ y $s \equiv (x-3)/3 = (y-9)/-2 = (z-8)/-2$

(a)

Determina la posición relativa de las rectas r y s .

Un punto de "r" es $A(-3, 9, 8)$, y un vector director es $(-6, 4, 4)$. Otro más sencillo es $\mathbf{u} = (-3, 2, 2)$

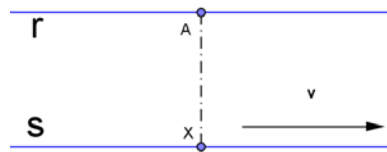
Un punto de "s" es B(3,9,8), y un vector director es $\mathbf{v} = (3,-2,-2)$.

Observamos que $\mathbf{u} = -1 \cdot \mathbf{v}$, por tanto las rectas son paralelas.

Formamos el vector $\mathbf{AB} = (6,0,0)$. Vemos que $\mathbf{AB} \neq \lambda \mathbf{u}$, por tanto las rectas son paralelas y distintas.

(b)

Calcula la distancia entre r y s .



Ponemos la recta "s" en paramétricas: $x = 3 + 3\lambda$, $y = 9 - 2\lambda$ y $z = 8 - 2\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tomamos un punto genérico de "s", el X, formamos el vector \mathbf{XA} y le imponemos la condición de ser perpendicular a "s" (su producto escalar (\bullet) es 0), obtenemos el valor de λ , y tenemos en cuenta que $d(r,s) = d(A,r) = d(A,X) = \|\mathbf{AX}\|$, siendo $\|\cdot\|$ el módulo del vector.

$X(x,y,z) = (3 + 3\lambda, 9 - 2\lambda, 8 - 2\lambda)$. $A(-3,9,8)$. $\mathbf{v} = (3,-2,-2)$.

$\mathbf{AX} = (3 + 3\lambda + 3, 9 - 2\lambda - 9, 8 - 2\lambda - 8) = (6 + 3\lambda, -2\lambda, -2\lambda)$.

$\mathbf{AX} \cdot \mathbf{v} = 0 = (6 + 3\lambda, -2\lambda, -2\lambda) \cdot (3,-2,-2) = 18 + 9\lambda + 4\lambda + 4\lambda = 18 + 17\lambda = 0$, de donde $\lambda = -18/17$, y el punto X proyección ortogonal de A sobre "r" es $X(3 + 3(-18/17), 9 - 2(-18/17), 8 - 2(-18/17)) = X(-3/17, 189/17, 172/17)$.

Vector $\mathbf{AX} = (6 + 3(-18/17), -2(-18/17), -2(18/17)) = (48/17, 36/17, 36/17)$

$$d(r,s) = d(A,r) = d(A,X) = \|\mathbf{AX}\| = \sqrt{\left(\frac{48}{17}\right)^2 + \left(\frac{36}{17}\right)^2 + \left(\frac{36}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{4896}{17^2}} = \sqrt{\frac{288}{17}} \text{ u.}$$

Opción B

Ejercicio 1, Opción B, Modelo 2 de 2012.

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

(a) [1'25 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

(c) [0'5 puntos] Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f .

Solución

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

(a)

Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla sigue

también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}((-x)^2 - (-x) + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{e^x} =$$

$$= \left\{ \frac{\infty}{\infty}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(x^2 - x + 1) = (\infty)(\infty) = \infty.$$

(b)

Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

Me piden la monotonía. Estudio de $f'(x)$

$$f(x) = e^x(x^2 - x + 1).$$

$$f'(x) = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x).$$

De $f'(x) = 0$, como e^x no se anula nunca tenemos $x^2 + x = 0 = x(x + 1)$, de donde $x = 0$ y $x = -1$, posibles extremos relativos.

Como $f'(-2) = (+)(2) > 0$, f es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-\infty, -1)$.

Como $f'(-0^+1) \cong (+)(-0^+09) < 0$, f es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-1,0)$.

Como $f'(1) = (+)(2) > 0$, f es estrictamente creciente (\nearrow) en $(1,+\infty)$.

Por definición $x = -1$ es un máximo relativo y vale $f(-1) = e^{(-1)}((-1)^2 - (-1) + 1) = 3/e \cong 1'1$.

Por definición $x = 0$ es un mínimo relativo y vale $f(0) = e^{(0)}(0 - 0 + 1) = 1$.

(c)

Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f .

Me piden la curvatura. Estudio de $f''(x)$

$$f(x) = e^x(x^2 - x + 1).$$

$$f'(x) = e^x(x^2 + x).$$

$$f''(x) = e^x(x^2 + x) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 1).$$

De $f''(x) = 0$, como e^x no se anula nunca tenemos $x^2 + 3x + 1 = 0$. Resolviendo la ecuación de 2º grado

obtenemos $x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \cong -2'6$ y $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \cong -0'38$, posibles puntos de inflexión.

Como $f''(-3) = (+)(1) > 0$, f es convexa (\cup) en $(-\infty, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2})$.

Como $f''(-1) = (+)(-1) < 0$, f es cóncava (\cap) en $(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2})$.

Como $f''(0) = (+)(1) > 0$, f es convexa (\cup) en $(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

Por definición $x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ son puntos de inflexión, porque en ellos cambia la curvatura.

Ejercicio 2, Opción B, Modelo 2 de 2012.

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$ respectivamente.

(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$ respectivamente.

(a)

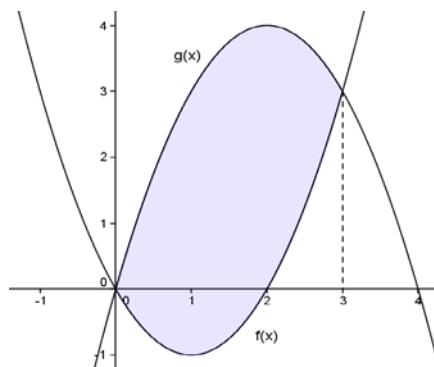
Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

Resolvemos $f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 4x \rightarrow 2x^2 - 6x = 0 = x(2x - 6)$, de donde $x = 0$ y $x = 3$. Las gráficas se cortan en $x = 0$ y $x = 3$.

La gráfica de f es una parábola con las ramas hacia arriba y abscisa de su vértice (V) en $f'(x) = 0 = 2x - 2$, es decir $x = 1$, de donde su vértice es $V(1, f(1)) = V(1, -1)$

La gráfica de g es una parábola con las ramas hacia abajo y abscisa de su vértice (V) en $g'(x) = 0 = -2x + 4$, es decir $x = 2$, de donde su vértice es $V(2, g(2)) = V(2, 4)$.

Un esbozo de sus gráficas es :



(b)

Calcula el área de dicho recinto.

$$\text{Área} = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = [-2x^3/3 + 3x^2]_0^3 = -18 + 27 = 9 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 3, Opción B, Modelo 2 de 2012.

[2'5 puntos] Encuentra la matriz X que satisfice la ecuación $XA + A^3B = A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Veamos si la matriz A tiene inversa es decir si su determinante es $\neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = 1(-1) = -1 \neq 0, \text{ luego existe } A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t).$$

De $XA + A^3B = A \rightarrow XA = A - A^3B$. Multiplicando por la derecha por A^{-1} tenemos:

$$XAA^{-1} = AA^{-1} - A^3BA^{-1} \rightarrow X = I_3 - A^3BA^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3; \quad A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A; \quad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

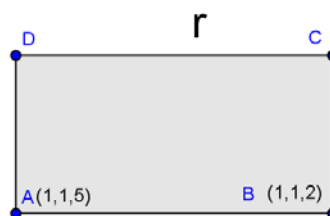
$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

$$A^3B \cdot A^{-1} = A^3B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = I_3 - A^3BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4, Opción B, Modelo 2 de 2012.

[2'5 puntos] Los puntos A(1, 1, 5) y B(1, 1, 2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C, consecutivo a B, está en la recta $x = (y-6)/-2 = (z+1)/2$. Determina los vértices C y D.

Solución

Ponemos la recta "r" en paramétricas $x = (y-6)/-2 = (z+1)/2 = \lambda \in \mathbb{R}$, de donde

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 6 - 2\lambda \\ z &= -1 + 2\lambda \end{aligned}$$

Como la figura es un paralelogramo los vectores **AB** y **DC** son iguales, **AB** = **DC** = (0,0,-3).

Como $C \in "r"$, C es de la forma $C(x, y, z) = C(\lambda, 6 - 2\lambda, -1 + 2\lambda)$.

Como el vector **BC** es perpendicular al vector **AB**, su producto escalar es cero, es decir **AB**•**BC** = 0.

$$\mathbf{AB} = (0,0,-3), \quad \mathbf{BC} = (\lambda - 1, 6 - 2\lambda - 1, -1 + 2\lambda - 2) = (-1 - \lambda, 5 - 2\lambda, -3 + 2\lambda).$$

AB•**BC** = 0 = (0,0,-3)•(-1 - λ, 5 - 2λ, -3 + 2λ) = 0 + 0 + (-3)(-3 + 2λ) = 9 - 6λ = 0 → λ = 3/2, luego el punto C es $C((3/2), 6 - 2(3/2), -1 + 2(3/2)) = C(3/2, 3, 2)$.

Como **AB** = **DC** = (0,0,-3) = (3/2 - x, 3 - y, 2 - z). Igualando tenemos

$$0 = 3/2 - x, \text{ de donde } x = 3/2.$$

$$0 = 3 - y, \text{ de donde } y = 3.$$

$$-3 = 2 - z, \text{ de donde } z = 5, \text{ y el punto } D(x,y,z) \text{ es } D(3/2, 3, 5).$$