Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Junio Incidencias 2014

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).

(a) [1'75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).

(a)

Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

Sabemos que la pendiente genérica de la recta tangente de la función f es f'(x).

Como me dicen que dicha pendiente (f '(x)) tiene que ser máxima, la derivada de la función f '(x) tiene que ser cero, es decir f ''(x) = 0, y me dicen que x > 0, por tanto tomaremos sólo las soluciones positivas.

$f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$; $f'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1x^{-2}}{2} + \frac{1}{x}$; $f''(x) = \frac{2x^{-2-1}}{2} + \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{-1}{x^2}$.

De f ''(x) = 0, tenemos $\frac{1}{x^3} + \frac{-1}{x^2} = 0$, es decir $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, luego $x^2 = x^3$, con lo cual:

$x^2 - x^3 = 0 = x^2\cdot(1 - x)$. Soluciones x = 0(doble), que no está en el dominio y x = 1.

Veamos que efectivamente x = 1 es un máximo de f''(x), es decir f '''(1) < 0.

$f''(x) = x^{-3} - 1\cdot x^{-2}$, de donde $f'''(x) = -3x^{-4} + 2\cdot x^{-3} = \frac{-3}{x^4} + \frac{2}{x^3}$, luego $f'''(1) = -3 + 2 = -1 < 0$.

El punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es (1,f(1)) = (1,1/2).

(a)

Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1

Recta normal en x = 1 es y - f(1) = (-1/f '(1))·(x - 1)

$f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$; luego f(1) = 1/2 + 0 = 1/2.

$f'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x}$, luego f '(1) = -1/2 + 1 = 1/2.

La recta normal pedida es y – (1/2) = -1/(1/2)·(x - 1), de donde y - (1/2) = -2·(x - 1), luego **la recta normal pedida es y = -2x + 5/2**.

Ejercicio 2 opción A, modelo Junio Incidencias 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4 - x)dx$ (ln denota el logaritmo neperiano).

Solución

Calculamos primero la integral indefinida $I = \int \ln(4 - x)dx$, que es una integral por partes

($\int udv = uv - \int vdu$)

$u = \ln(4 - x)$, de donde $du = \frac{-1}{4 - x}dx$. $dv = dx$, de donde $v = \int dx = x$

$I = \int \ln(4 - x)dx = x\cdot\ln|4 - x| - \int x\cdot\frac{(-dx)}{4 - x} = x\cdot\ln|4 - x| + \int\frac{xdx}{4 - x} = x\cdot\ln|4 - x| - I_1$.

$I_1 = \int\frac{xdx}{4 - x}$, que es una integral racional.

Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciese falta.

$$\begin{array}{r|l} x & -x + 4 \\ \cline{2-2} -x + 4 & -1 \\ \cline{1-1} +4 & \end{array}$$

Recordamos que $I_1 = \int ((C(x)) + R(x)/(div(x))dx = \int -1dx + \int\frac{4}{4 - x}dx = - x - 4\cdot\ln|4 - x|$. Luego

$I = x\cdot\ln|4 - x| + I_1 = x\cdot\ln|4 - x| + (-x - 4\cdot\ln|4 - x|) = x\cdot\ln|4 - x| - x - 4\cdot\ln|4 - x|$

La integral pedida es

$\int_{-1}^{1} \ln(4 - x)dx = [x\cdot\ln|4 - x| - x - 4\cdot\ln|4 - x|]_{-1}^{1} =$

$= (1\cdot\ln|4 - 1| - 1 - 4\cdot\ln|4 - 1|) - [(-1)\cdot\ln|4 - (-1)| - (-1) - 4\cdot\ln|4 - (-1)|] =$

$= \ln(3) - 1 - 4\ln(3) + \ln(5) - 1 + 4\ln(5) =$ $\mathbf{-3\ln(3) + 5\ln(5) - 2 \cong 2'7514}$.

Ejercicio 3 opción A, modelo Junio Incidencias 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x + (m+1)y + 2z &= -1 \\ mx + y + z &= m \\ (1-m)x + 2y + z &= -m - 1 \end{aligned}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [0'75 puntos] Resuélvelo para m = 2. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que z = 2

Solución

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (1)(1-2) - (m+1)(m-1+m) + (2)(2m-1+m) =$

$= -1 - (m+1)(2m-1) + (2)(3m-1) = -1 - (2m^2 + m - 1) + 6m - 2 = -2m^2 + 5m - 2$.

Resolviendo la ecuación $-2m^2 + 5m - 2 = 0$, obtenemos m = 1/2 y m = 2.

Si **m ≠ 1/2 y m ≠ 2**, det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **m = 1/2**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2+1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1-1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 - 3/4 = 1/4 $\neq$ 0, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{saco} \\ \text{un 2 de} \\ \text{cada fila}\end{matrix}$ $= (2)\cdot(2)\cdot(2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix}$ =

= 8·((2)(-6-4) - (3)(-3-1) + (-1)(4-2)) = 8(-10) = -80 $\neq$ 0, tenemos rango(A^*) = 3. Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si **m = 2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ = 0, por que la fila 2ª se obtiene de la 1ª restándole la 3ª, luego tenemos rango(A^*) = 2. Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)

Resuélvelo, si es posible, para m = 2. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que z = 2

Hemos visto en el apartado anterior que si **m = 2**, rango(A) = rango(A^*) = 2, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

x + 3y + 2z = -1 $\rightarrow$ x + 3y + 2z = -1

2x + y + z = 2. $F_2 - 2F_1$ $\rightarrow$ - 5y - 3z = 4. Tomo **z = a** $\in$ R, de donde

y = -3a/5 - 4/5, y entrando en la 1ª ecuación tenemos x + 3(-3a/5 – 4/5) + 2(a) = -1, de donde x + a/5 – 12/5 = -1, luego **x = -a/5 + 7/5.**

Solución (x,y,z) = (-a/5 + 7/5, -3a/5 - 4/5, a) con a $\in$ R.

Tomando z = a = 2, la solución pedida es **(x,y,z) = (-2/5 + 7/5, -3(2)/5 - 4/5, 2) = (1,-2,2).**

Ejercicio 4 opción A, modelo Junio Incidencias 2014

Sean los vectores **u** = (1,-1,0), **v** = (0,1,2) y **w** = (1+α,2α,2-3α). Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

(a) [1 punto] **u**, **v** y **w** están en el mismo plano.

(b) [0'5 puntos] **w** es perpendicular a **u** y **v**.

(c) [1 punto] El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores **u, v** y **w** es 1/6.

Solución

Sean los vectores **u** = (1,-1,0), **v** = (0,1,2) y **w** = (1+α,2α,2-3α). Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

(a)

u, **v** y **w** están en el mismo plano.

Sabemos que **u**, **v** y **w** están en el mismo plano, si los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes, es decir si y solo si det(**u**,**v**,**w**) = 0

$$\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+\alpha & 2\alpha & 2-3\alpha \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix} = 1(2-3\alpha-4\alpha) - (-1)\cdot(0-2-2\alpha) + 0 = 2-7\alpha-2-2\alpha = -9\alpha = 0,$$

con lo cual **si α = 0, los vectores u**, **v** y **w son linealmente dependientes, y por tanto están en el mimo plano.**

(b)

w es perpendicular a **u** y **v**.

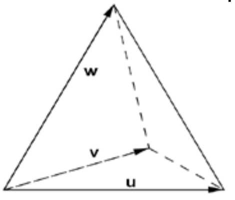
Si los vectores son perpendiculares, su producto escalar (•) es cero.

w•(u+v) = $(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha)\bullet(1,0,2) = 1\cdot(1+\alpha) + 0\cdot(2\alpha) + 2\cdot(2-3\alpha) = 1+\alpha+4-6\alpha = 5 - 5\alpha = 0$, **de donde α = 1, para que w sea perpendicular a u y v.**

(c)

El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores **u, v** y **w** es 1/6.

Sabemos que el volumen del tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **u, v** y **w;** es decir 1/6 del valor absoluto del producto mixto [**u,v**,**w**].



$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+\alpha & 2\alpha & 2-3\alpha \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix} = 1(2-3\alpha-4\alpha) - (-1)\cdot(0-2-2\alpha) + 0 =$$

$= 2-7\alpha-2-2\alpha = -9\alpha$.

Como el volumen del tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo, tenemos:

(1/6)·| [**u,v**,**w**] | = 1/6 (Volumen que me han dado), es decir | [**u,v**,**w**] | = 1→ |-9α| = 1, de donde tenemos dos ecuaciones: $-(-9\alpha) = 1$ y $+(-9\alpha) = 1$, por tanto tenemos dos soluciones, $\alpha = 1/9$ y $\alpha = -1/9$.

Por tanto el volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores u, v y w es 1/6, si tomamos α = 1/9 y α = -1/9.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Junio Incidencias 2014

[2'5 puntos] Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en x = -1 y que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$.

Solución

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en x = -1 y que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$.

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es polinómica por tanto continua, derivable e integrable las veces que sean necesarias, en R.

Como tiene un máximo relativo en x = -1, sabemos que **f'(-1) = 0**.
$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$.

De f '(-1) = 0, tenemos $3(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$, de donde **-2b + c = -3.**

También me dicen que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$, luego existe el límite y se le podrá aplicar la Regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en [a-δ, a+δ], derivables en (a-δ,a+δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos:

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \frac{1 + b + c + d}{0}$. Como me dicen que el límite existe, puesto que vale 4, **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir 1 + b + c + d = 0, de donde **b + c + d = -1**. Aplicamos l'Hôpital (L'H):

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \{L'H\} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2bx + c}{1} = 3 + 2b + c = 4$ (valor del límite), de donde 2**b + c = 1**.

Resolvemos el sistema: -2b + c = -3; 2b + c = 1; b + c + d = -1.

Sumando 1ª y 2ª tenemos 2c = -2, de donde **c = -1.** Entrando en la 1ª tenemos -2b +(-1) = -3, de donde -2b = -2, luego **b = 1.** Entrando en la 3ª tenemos (1) + (-1) + d = -1, luego **d = -1.**
Los valores pedidos son b = 1, c = -1 y d = -1 y $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Ejercicio 2 opción B, modelo Junio Incidencias 2014

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = - x^2 + 2x + 3$.
(a) [0'5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.
(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta 2x + y - 7 = 0 y el eje OX, calculando los puntos de corte.
(c) [1'25 puntos] Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = - x^2 + 2x + 3$.
(a)
Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

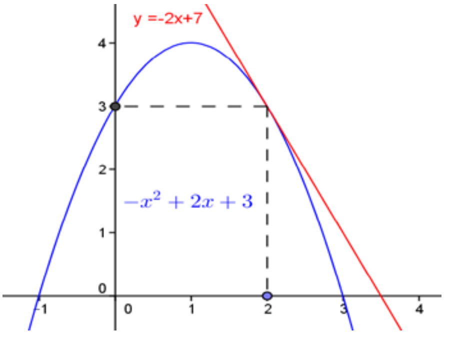
Recta tangente en x = 2 es y - f(2) = f '(2))·(x - 2)
$f(x) = - x^2 + 2x + 3$; luego $f(2) = -(2)^2 + 2(2) + 3 = 3$.
f '(x) = - 2x + 2, luego f '(2) = -2(2) + 2 = -2.
La recta tangente pedida es y - 3 = -2·(x - 2), luego **la recta tangente pedida es y = -2x + 7**.
(b)
Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta 2x + y - 7 = 0 y el eje OX, calculando los puntos de corte.

Observamos que la reta que nos han dado 2x + y - 7 = 0, es la tangente a f en x = 2, es decir y = -2x + 7. Como es una recta con dos puntos es suficiente para dibujarla, uno es el punto de tangencia (2,y(2)) = (2,3) y otro el corte con el eje OX (de ecuación y=0), luego de 0=-2x+7, tenemos x = 7/2 = 3'5 y el otro punto es (3'5,0)

La gráfica de $f(x) = - x^2 + 2x + 3$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (∩) porque

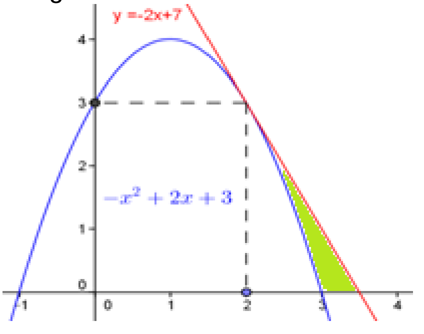
el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de f'(x) = 0 = -2x + 2, de donde x = 1 y el vértice es V(1,f(1) = V(1,4).
Cortes con los ejes:
Para x = 0, f(0) = 3.
Para f(x) = 0, tenemos $-x^2 + 2x + 3 = 0$, y nos sale x = -1 y x = 3. Puntos (-1,0) y (3,0).

Un esbozo de las gráficas es



(c)
Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Me están pidiendo el área de la región sombreada en verde:



Si observamos la gráfica podemos calcularla como el área del triángulo que determina la recta y = -2x + 7 entre x = 2 y x = 3'5, menos el área bajo la parábola f(x) entre x = 2 y x = 3.

Área = Área triángulo – Área bajo parábola = (1/2)·base·altura – $\int_2^3(-x^2+2x+3)dx$ =

= $(1/2)\cdot(3'5-2)\cdot(3) - [-x^3/3+x^2+3x]_2^3 = 9/4 - [(-(3)^3/3+(3)^2+3(3)) - (-(2)^3/3+(2)^2+3(2))] =$
$= 9/4 - [(-9+9+9) - (-8/3+4+6)] = 9/4 - (5/3)$ **= 7/12 u² ≅ 0'5833 u²**

Ejercicio 3 opción B, modelo Junio Incidencias 2014

Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [0'75 puntos] ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2\cdot A + I$? (I denota la matriz identidad

b) [1'75 puntos] Para m = 1, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface A·X - B = A·B.

Solución

Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2\cdot A + I$? (I denota la matriz identidad

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix}$.

$2\cdot A + I = 2\cdot\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2m & 2\\ 2 & 2-2m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2m & 2\\ 2 & 3-2m\end{pmatrix}$. Igualando

$A^2 = 2\cdot A + I$, tenemos $\begin{pmatrix}m^2+2m+2 & 2\\ 2 & m^2-2m+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2m & 2\\ 2 & 3-2m\end{pmatrix}$, de donde:

$m^2 + 2m + 2 = 3 + 2m \rightarrow m^2 = 1$, de donde $m = \pm 1$.
2 = 2. Cierto
2 = 2. Cierto
$m^2 - 2m + 2 = 3 - 2m \rightarrow m^2 = 1$, de donde $m = \pm 1$.

Por tanto la igualdad $A^2 = 2\cdot A + I$ es cierta si $m = \pm 1$.

b)
Para m = 1, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A\cdot X - B = A\cdot B$.

Para m = 1, calcula $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, y como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, la matriz A tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$

$A^t = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (1/-1).\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

De $A\cdot X - B = A\cdot B$, tenemos $A\cdot X = B + A\cdot B$. Como existe A^{-1}, multiplicamos por la izquierda la expresión $A\cdot X = B + A\cdot B$, por A^{-1}.

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(B + A\cdot B) \rightarrow I_2\cdot X = A^{-1}\cdot B + A^{-1}\cdot A\cdot B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B + I_2\cdot B = A^{-1}\cdot B + B$

Luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot B + B} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$**.**

Ejercicio 4 opción B, modelo Junio Incidencias 2014

Considera el punto P(2,-2,0) y la recta "r" dada por $\begin{cases}x + z - 2 = 0\\ y + z - 1 = 0\end{cases}$.

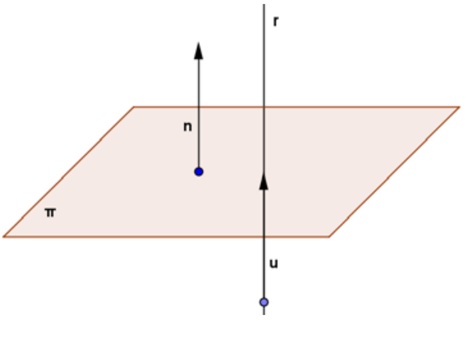
a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a "r".
b) [1'25 puntos] Calcula la distancia de P a "r".

Solución

Considera el punto P(2,-2,0) y la recta "r" dada por $\begin{cases}x + z - 2 = 0\\ y + z - 1 = 0\end{cases}$.

a)
Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a "r".

Ponemos la recta "r" en paramétricas, tomando $z = \lambda \in R$, con lo cual "r"$\equiv \begin{cases}x = 2 - \lambda\\ y = 1 - \lambda\\ z = 0 + \lambda\end{cases}$. Un punto de "r" es A(2,1,0) y un vector director es **u** = (-1,-1,1).



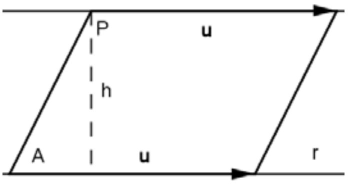
Como el plano es perpendicular a "r" el vector normal del plano **n** coincide con el vector director de "r" el **u**, es decir **n** = **u** = (-1,-1,1), y la ecuación del plano π es **PX•n** = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano y "•" el producto escalar:

$\pi \equiv$ **PX•n** = 0 = (x-2,y+2,z)•(-1,-1,1) = -x + 2 - y – 2 + z = **-x - y + z = 0**

b)

Calcula la distancia de P a "r".

Calculamos la distancia del punto P a la recta "r", utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector **u**. Por el punto P trazamos una recta paralela a la "r", y formamos el paralelogramo.

El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AP** es **||AP**x**u||** = base·altura =
= **||u||**·h, pero la altura "h" es d(P;r), luego d(P;r) = (**||AP**x**u||**)/(**||u||**) ("x" es el producto vectorial).

De "r", punto el A(2,1,0) y vector **u** = (-1,-1,1).

Punto P(2,-2,0). **AP** = (0,-3,0); **AP**x**u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(-3-0) - **j**(0) + **k**(0-3) = (-3,0,-3) ;

||ACx**u||** = $\sqrt{(3^2+0^2+3^2)} = 3\cdot\sqrt{(2)}$

||u|| = $\sqrt{(1^2+1^2+1^2)} = \sqrt{(3)}$

Luego d(P;r) = (**||AP**x**u||**) / (**||u||**) = $3\cdot(\sqrt{(2)}\ ) / (\ \sqrt{(3)}\ )$ **= √(6) u.l.**