Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2014

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln(x)}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

Solución

Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln(x)}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln(x)-a(x-1)}{(x-1)\cdot\ln(x)}\right) = 0/0$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln(x)-a(x-1)}{(x-1)\cdot\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-a)}{1\cdot\ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)+1-a)}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\right) = (1-a)/0.$$

Como me dicen que el límite existe y es finito **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir 1 - a = 0, de donde **a = 1**.
Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con a = 1, tenemos que **el límite es:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)+1-1)}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x-(x-1)}{x^2}}\right)\ (1)/(1+1/1) = \mathbf{1/2.}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2014

[2'5 puntos] Determina una función derivable $f: R \to R$ sabiendo que f(1) = 1 y que

$$f'(x) = \begin{cases} x^2-2x & si \quad x<0 \\ e^x-1 & si \quad x\ge 0. \end{cases}$$

Solución

Determina una función derivable f:R→R sabiendo que f(1) = 1 y que $f'(x)= \begin{cases} x^2-2x & si \quad x<0 \\ e^x-1 & si \quad x\ge 0. \end{cases}$

Recordamos que si un función es derivable entonces también es continua.
Por el teorema fundamental del cálculo integral que dice: Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces la función $\int_a^x f(t)dt$ es derivable, y su derivada es la función f(x). En nuestro caso $f(x) = \int f'(x)dx$

Si x < 0, $f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2-2x)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+K = x^3/3 + x^2 + K$

german.jss@gmail.com

Si $x \geq 0$, $f(x) = \int f'(x)dx = \int (e^x - 1)dx = e^x - x + L$
De f(1) = 1 (vemos que x = 1 está en la rama $x \geq 0$) tenemos $e^1 - 1 + L = 1$, de donde
$L = 2 - e$, por tanto si $x \geq 0$, $f(x) = e^x - x + 2 - e$.

Como es continua en x = 0 (al ser derivable f), $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(e^x - x + 2 - e\right) = e^0 - 0 + 2 - e = 1 + 2 - e =$ **3 - e**;

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + K\right) = \mathbf{K}$. Igualando, por ser continua, tenemos K = 3 - e , y **la función pedida es** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + x^2 + 3 - e & \text{si } x < 0 \\ e^x - x + 2 - e & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **.**

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2014

Se sabe que el determinante de la matiz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es - 3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:
(a) [1 punto] det(-2A) y $\det(A^{-1})$.
(b) [1'5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

Solución

(a)
Calcula det(-2A) y $\det(A^{-1})$.
(i)Sabemos que $\det(k\cdot A_n) = (k)^n\cdot\det(A)$ y que $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A))$, porque de $A^{-1}\cdot A = I$, aplicándole determinantes $|A^{-1}\cdot A| = |I| = 1 = |A^{-1}|\cdot|A|$.
Luego **det(-2A)** = $(-2)^3\cdot\det(A) = -8\cdot(-3)$ **= 24**, y $\mathbf{\det(A^{-1})}$ = 1/(det(A)) = 1/-3 **= -1/3.**
(b)
Calcula $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$
(ii)Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
(iii)Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ = {aplicamos (ii)} = $(7)\cdot(2)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = {aplicamos (iii)} =

$= (14)(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (14)(-1)(-3)$ **= 42**.

(iv)El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.
(v)Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el premier y segundo sumando respectivamente.
(vi)Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, dicho determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (iv)}\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+2a_{31} & a_{22}+2a_{32} & a_{23}+2a_{33} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (v)}\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (ii) y (vi)}\} = (5)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 0 =$$

$= (5)\cdot(-3)$ **= -15.**

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2014

Sean los vectores **u** = (1,-1,3), **v** = (1,0,-1) y **w** = (λ,1,0).

(a) [0'75 puntos] Calcula los valores λ que hacen que hacen que **u** y **w** sean ortogonales.

(a) [0'75 puntos] Calcula los valores λ que hacen que hacen que **u, v** y **w** sean linealmente independientes.

(c) [1 punto] Para $\lambda = 1$ escribe el vector **r** = (3,0,2) como combinación lineal de **u, v** y **w.**

Solución

(a)

Calcula los valores λ que hacen que hacen que **u** y **w** sean ortogonales.

Si los vectores son ortogonales su producto escalar (•) es cero.

u•w = λ – 1 + 0 = 0, **de donde λ = 1.**

(b)

Los vectores son linealmente independientes si y solo si det(**u**,**v**,**w**) $\neq$ 0

det(**u**,**v**,**w**) = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = $\lambda(1-0) - 1(-1-3) + 0 = \lambda + 4 \neq 0$, con lo cual **si $\lambda \neq -4$, los vectores son linealmente independientes.**

(c)

Para $\lambda = 1$ escribe el vector **r** = (3,0,2) como combinación lineal de **u, v** y **w.**

Sabemos que **r** es combinación lineal de **u, v** y **w,** si existen números reales a, b y c, no todos cero tales que **r** = a·**u** + b·**v** + c·**w,** es decir:

(3,0,2) = a·(1,-1,3) + b·(1,0,-1) + c·(1,1,0) = (a,-a,3a) + (b,0,-b) + (c,c,0) = (a+b+c,-a+c,3a-b).

Igualando miembro a miembro tenemos el sistema $\begin{cases} a+b+c=3 \\ -a\quad +c=0 \\ 3a-b\quad =2 \end{cases}$. Lo resolvemos por Gauss, poniendo su matriz asociada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3-3F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ F_3+4F_2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

, por tanto nuestro sistema asociado es $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=3 \\ 5z=5 \end{cases}$, como tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas, el sistema es compatible y determinado, y tiene solución única:

De 5z = 5, tenemos z = 1.

De y + 2(1) = 3, tenemos y = 1.

De x + (1) + (1) = 3, tenemos x = 1. La solución es (x,y,z) = (1,1,1), es decir **r** es combinación lineal de **u, v** y **w,** porque (3,0,2) = 1·(1,-1,3) + 1·(1,0,-1) + 1·(1,1,0).

Si nos fijamos no hay que hacer todo el desarrollo porque se vé que al sumar los tres vectores **u, v** y **w**, obtenemos el vector **r.**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2014

Considera la función derivable $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

(a) [1'75 puntos] Calcula a y b.
(b) [0'75 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -1.

Solución

Considera la función derivable $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

(a)
Calcula a y b.

Como es derivable en su dominio, por tanto también es continua en su dominio; en particular es continua y derivable en x = 0.

Como es continua en x = 0 , $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \dfrac{e^0 - e^0}{0} = 0/0;$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (está explicada en la opción A, ejercicio 1), con lo cual tenemos

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = (1+1)/2 = 1$

$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax + b) = b$. Igualando **b = 1.**

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - (-e^{-x})(2x) - (e^x - e^{-x})2}{(2x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \dfrac{2xe^x + 2xe^{-x} - 2e^x + 2e^{-x}}{(2x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Como es derivable en x = 0, tenemos f '(0^+) = f'(0^-). Vamos a ver la continuidad de la derivada.

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{2xe^x + 2xe^{-x} - 2e^x + 2e^{-x}}{(2x)^2}$ = $(0+0-2+2)/(0)^2$ = 0/0. Le aplicamos L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2xe^x + 2xe^{-x} - 2e^x + 2e^{-x}}{(2x)^2} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{2e^x + 2xe^x + 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^x - 2e^{-x}}{2(2x)2}$ = (2+0+2-0-2-2)/0 =

= 0/0. Le aplicamos L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2e^x + 2xe^x + 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^x - 2e^{-x}}{8x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{2e^x + 2e^x + 2xe^x - 2e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^x + 2e^{-x}}{8} =$

= (2+2+0-2-2+0-2+2)/8 = 0/8 = 0

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (a) = a$. Igualando tenemos **a = 0.**

(b)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -1.

Vemos x = -1 está en la rama x < 0, donde $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ y $f'(x) = \dfrac{2xe^x + 2xe^{-x} - 2e^x + 2e^{-x}}{(2x)^2}$.

La ecuación de la recta tangente en x = -1 es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$

$\mathbf{f(-1)} = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2(-1)} = \dfrac{e^{-1} - e}{-2}$; $\mathbf{f'(-1)} = \dfrac{2(-1)e^{-1} + 2(-1)e^{1} - 2e^{-1} + 2e^{1}}{(-2)^2} = \dfrac{-4e^{-1}}{4} = \mathbf{-e^{-1}}$.

Luego **la recta tangente en x = -1 es** $y - \dfrac{e^{-1} - e}{-2} = \mathbf{-e^{-1}}(x + 1)$ es decir $\mathbf{y = -x/e + (-3+e^2)/(2e)}$**.**

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2014

Considera el recinto limitado por las siguientes curvas

$$y = x^2, \quad y = 2 - x^2, \quad y = 4$$

(a) [1 punto] Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto.

Solución

Considera el recinto limitado por las siguientes curvas: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$

(a)

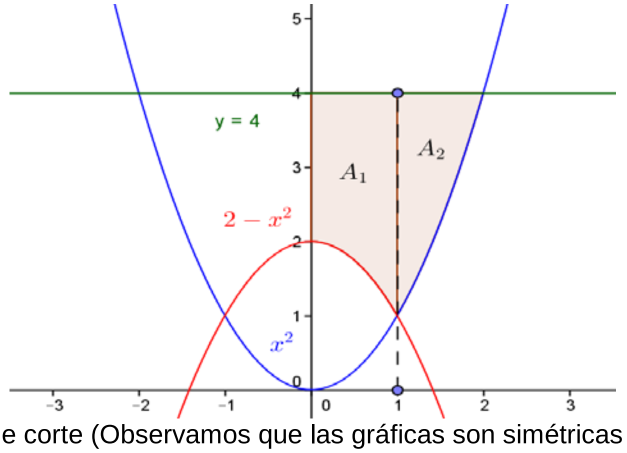
Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

La gráfica de $f(x) = x^2$ es la de una parábola con las ramas hacia arriba (∪) porque el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0 = 2x$, de donde x = 0 y el vértice es V(0,f(0) = (0,0). Además pasa por los puntos (-1,f(-1)) = (-1,1) y (1,f(1)) = (1,1).

La gráfica de $g(x) = 2 - x^2$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (∩) porque el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de $g'(x) = 0 = -2x$, de donde x = 0 y el vértice es V(0,g(0) = (0,2). Además pasa por los puntos (-1,g(-1)) = (-1,1) y (1,g(1)) = = (1,1).

La gráfica de y = 4 es la de una recta paralela al eje de abscisas de ordenada 4.

Un esbozo de las gráficas es



Veamos los puntos de corte (Observamos que las gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas OY).

De $x^2 = 2 - x^2$, tenemos $2x^2 = 2 \to x^2 = 1$. Soluciones x = -1 y x = 1.

De $x^2 = 4$, tenemos $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Soluciones x = -2 y x = 2.

(b)

Calcula el área del recinto.

Como las gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas OY, el área pedida es:

Área = $2\cdot(A_1 + A_2) = 2\cdot\left[\int_0^1 (4-(2-x^2))dx + \int_1^2 (4-x^2)dx\right] = 2\cdot\left[\int_0^1 (2+x^2)dx + \int_1^2 (4-x^2)dx\right] =$

$= 2\cdot\left(\left[2x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2\right) = 2\cdot [(2 + 1/3) + (8 - 8/3) - (4 - 1/3)] = 2\cdot(4)$ **= 8 u^2**.

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2014

Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [0'5 puntos] Calcula A^{-1}.

a) [2 puntos] Hallar la matriz X que verifica $A^t\cdot X + B = I$, siendo I la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Solución

Considera las matrices, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a)

Calcula A^{-1}.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ $= 1(0-3)-0+2(3-2) = -1 \neq 0$, la matriz A tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)=(1/-1).\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a)

Hallar la matriz X que verifica $A^t\cdot X + B = I$, siendo I la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Por las propiedades de la matriz inversa sabemos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, por tanto:

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

De $A^t\cdot X + B = I$, tenemos $A^t\cdot X = I - B$. Como existe $(A^t)^{-1}$ multiplicamos por la izquierda la expresión $A^t\cdot X = I – B$, por $(A^t)^{-1}$.

$(A^t)^{-1}\cdot A^t\cdot X = (A^t)^{-1}\cdot I – (A^t)^{-1}\cdot B \rightarrow I\cdot X = (A^t)^{-1} – (A^t)^{-1}\cdot B \rightarrow X = (A^t)^{-1} – (A^t)^{-1}\cdot B$

Luego $\mathbf{X = (A^t)^{-1} – (A^t)^{-1}\cdot B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2014

Sea "r" la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea "s" la recta dada por $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Determina la posición relativa de r y s.
b) [1'5 puntos] Halla la ecuación general del plano que contiene a "r" y es paralelo a "s".

Solución

Sea "r" la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea "s" la recta dada por $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$

a)
Determina la posición relativa de r y s.

Un punto de "r" es A(-2,-1,1), y un vector director es **u** = (2,1,-3).
En "s", un punto B lo podemos obtener tomando y = 0, con lo cual x = 3 y z = 6. B(3,0,6), y un vector director es **v =** (1,-1,0)x(3,0,-1) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(1-0)- **j**(-1-0)+ **k**(0+3) **= (1,1,3).**

Observamos que los vectores **u** y **v** no son proporcionales, por tanto las rectas se cortan o se cruzan.
AB = (5,1,5)
Si det(**AB**,**u**,**v**) = 0, las rectas se cortan.
Si det(**AB**,**u**,**v**) ≠ 0, las rectas se cruzan.

Como det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = 5(3+3) - 1(6+3) + 5(2-1) = 30 - 9 + 5 = 26 ≠ 0, **luego las rectas se cruzan**.

b)
Halla la ecuación general del plano que contiene a "r" y es paralelo a "s".

Como el plano contiene a "r" tomo de "r" un punto, el A y un vector, el **u**. Como el plano es paralelo a la recta "s" tomo de "s" el otro vector independiente, el **v.**
La ecuación general del plano pedida es det(**AX,u,v**) = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$\pi \equiv$ det(**AX,u,v**) = 0 = $\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = (x+2)(3+3) – (y+1)(6+3) + (z-1)(2-1) =

= 6x - 9y + z + 2 = 0.
Un esbozo de la figura es: