SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SEPTIEMBRE 2012 (COMÚN MODELO)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(2'5 puntos) Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros.
Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo.

Solución

Llamamos "x" al número de unidades de camisas.
Llamamos "y" al número de unidades de pantalones.
Para determinar las inecuaciones y la función Beneficio F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Camisas	Pantalones	Máximo
Tela	2	3	1050
Botones	5	2	1250
Cremallera	0	1	300
Beneficio	30€	50€	30x + 50y

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones:

$$2x+3y \le 1050;\quad 5x + 2y \le 1250;\quad y \le 300;$$

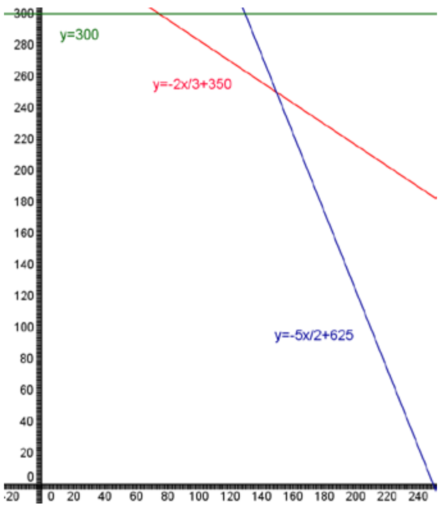
La función beneficio es F(x,y) = 30x + 50y

Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible.

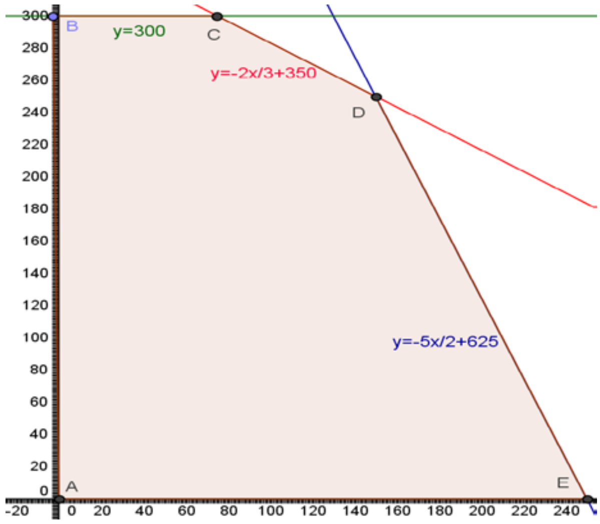
Inecuaciones : $2x+3y \le 1050$; $5x + 2y \le 1250$; ; $x \ge 0$; $0 \le y \le 300$;

Rectas: $y = -2x/3+350$; $y = -5x/2+625$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 300$

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades "$y \le -2x/3+350$; $y \le -5x/2+625$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $y \le 300$", vemos que el recinto factible, y los vértices A, B, C, D y E de dicha región son:



De x= 0 e y=0, Tenemos el punto de corte A(0,0)
De x= 0 e y=300, Tenemos el punto de corte B(0,300)
De y= 300 e y = -2x/3+350, tenemos 300 = -2x/3+350, de donde 2x/3 = 50, luego x = 75, y el punto de corte C(75,300).
De y= -2x/3+350 e y = -5x/2+625, tenemos -2x/3+350 = -5x/2+625, de donde -4x+2100 = -15x+3750, luego 11x = 1650, por tanto x = 150 e y = -2(150)/3+350 = 250, y el punto de corte D(150,250).
De y= -5x/2+625 e y = 0, tenemos 0 = -5x/2+625, de donde 5x = 1250, luego x=250, y el punto de corte D(250,0)

El recinto tiene por vértices A(0,0), B(0,300), C(75,300), D(150,250) y E(250,0).

Consideremos la función F(x,y) = 30x + 50y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(0,0) = 30(0) + 50(0) = 0, F(0,300) = 30(0) + 50(300) = 15000, F(75,300) = 30(75) + 50(300) = 17250, F(150,250) = 30(150) + 50(250) = 17000, F(250,0) = 30(250) + 50(0) = 7500.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo beneficio de la función F en la región es 17250** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el punto (75,300).**

El mayor beneficio es **17250 € y se obtiene elaborando 75 camisas y 300 pantalones.**

EJERCICIO 2

(2'5 puntos) Determine los valores que han de tomar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \text{ sea derivable en R.}$$

Solución

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ sea derivable.

Si una función es derivable sabemos que también es continua. Calcularemos primero la continuidad y después la derivada.

La función $-x^2 + ax - 7$ es continua y derivable en R, en particular en $(-\infty,1)$.
La función 4x + b es continua y derivable en R, (números que anulas el denominador), en particular en $x \geq 1$.

Estudiamos la continuidad en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$f(1) = 4(1) - b = 4 - b$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + ax - 7) = -1 + a - 7 = a - 8$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4x - b) = 4 - b$. Como f es continua en "x = 1", tenemos **4 - b = a – 8**.

Veamos la derivabilidad en x = 1 y x = 4.

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 7 & \text{si } x < 1 \\ 4x - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x + a) = -2 + a$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (4) = 4$, Como f es derivable en "x = 1", tenemos **-2 + a = 4**, de donde **a = 6**. Entrando en la otra ecuación tenemos **4 - b = 6 – 8,** de donde **b = 6**.
Para que f sea derivable en R, a = 6 y b = 6.

EJERCICIO 3

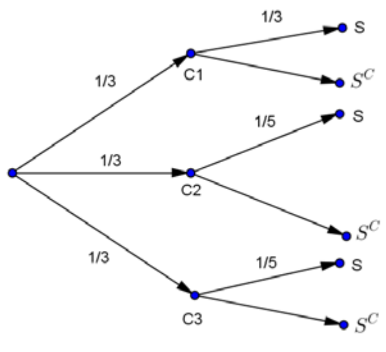
Un pescador tiene tres tipos de carnada de las que sólo una es adecuada para pescar salmón. Si utiliza la carnada correcta la probabilidad de que pesque un salmón es 1/3, mientras que si usa una de las inadecuadas esa probabilidad se reduce a 1/5.
a) (1'25 puntos) Si elige aleatoriamente la carnada, ¿cuál es la probabilidad de que pesque un salmón?
b) (1'25 puntos) Si ha pescado un salmón, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho con la carnada adecuada?

Solución

Llamemos C1, C2, C3, S y S^C a los sucesos "carnada adecuada", "carnadas no adecuadas", "pesca salmón" y "no pesca salmón". Nos dicen que hay tres tipos de carnada

Como Hay tres tipos de carnada y se eligen aleatoriamente tenemos p(C1) = p(C2) = p(C3) = 1/3.
De "si utiliza la carnada correcta la probabilidad de que pesque un salmón es 1/3", tenemos p(S/C1) = 1/3.
De "si usa una de las inadecuadas esa probabilidad se reduce a 1/5", tenemos p(S/C2) = p(S/C3) = 1/5.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo valen 1).



a)
Si elige aleatoriamente la carnada, ¿cuál es la probabilidad de que pesque un salmón?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que pesque un salmón es:
p(S) = p(C1).p(S/C1) + p(C2).p(S/C2) + p(C2).p(S/C2) = (1/3)(1/3) + (1/3)(1/5) + (1/3)(1/5) = 11/45 ≅ 0'24.

b)
Si ha pescado un salmón, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho con la carnada adecuada?

Aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad de que haya pescado un salmón, con la carnada adecuada es:

$$p(C1/S) = \frac{p(C1 \cap S)}{p(S)} = \frac{p(C1).p(S/C1)}{p(S)} = \frac{(1/3).(1/3)}{11/45} = 5/11 \cong 0'4545.$$

EJERCICIO 4

En una caja de ahorros se sabe que el porcentaje de los nuevos clientes que contratan un plan de pensiones no supera el 23%. El director de una de las sucursales decide hacer un regalo a cualquier nuevo cliente que contrate uno de esos planes y, tras un mes, comprueba que 110 de los 470 nuevos clientes han contratado un plan de pensiones.
a) (1'5 puntos) Plantee un contraste de hipótesis, con $H_0 : p \leq 0'23$, para decidir si, con los datos dados, se puede afirmar que la medida del director ha aumentado la contratación de estos planes de pensiones. Halle la región de aceptación de este contraste de hipótesis para un nivel de significación del 5%.
b) (1 punto) Según el resultado del apartado anterior, ¿qué conclusión podemos obtener sobre la medida tomada por el director de esta sucursal?

Solución

(a) y (b)

Datos del problema: $p_0 = 23\% = 0'23$; $n = 470$; $\hat{p} = 110/470 \cong 0'2340426$; $\alpha = 5\% = 0'05$

Etapa 1: Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: $p_0 \leq 0'23$ (me lo dice el problema) y H_1: $p_0 > 0'23$, la cual nos indica la dirección del contraste, es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico.

Para plantear la hipótesis nula nos basamos en la información previa. El director dice que por lo menos mas de un 23% de las personas contrataran un plan de pensiones después del regalo. Luego es un contraste de hipótesis unilateral.
En la hipótesis alternativa nos dice que la situación es la contraria.

Etapa 2: El nivel de significación es $\alpha = 0'05$, luego tenemos $1 - \alpha = 0,95$.
De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), que no aparece en las tablas. El valor mas próximo es la mitad entre 0'9495 y 0'9505, que corresponde a $z_{1-\alpha} = (1'64+1'65)/2 = 1'645$, con lo cual el **valor crítico** es $z_{1-\alpha} = 1'645$ que separa las zonas de aceptación y de rechazo.

Etapa 3 y 4: En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}} =$

$$= \frac{0'2340426 - 0'23}{\sqrt{\dfrac{0'23.0'77}{450}}} = 0'20378.$$

Etapa 5: Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = 0'20378$ es menor que el **valor crítico** $z_{1-\alpha} = 1,645$, vemos que se encuentra en la zona de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar la aceptar hipótesis nula H_0: $p_0 \leq 0'23$, y rechazamos la hipótesis alternativa H_1: $p_0 > 0'23$**. Con lo cual con una probabilidad de equivocarnos del 5% afirmamos que más de un 23% de las personas contrataran un plan de pensiones después del regalo.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (Resuelto por D, Manuel Froufe Quintas, Catedrático de Matemáticas del IES F^{co} Ayala)

Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.
En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.
a) (0'75 puntos) Para cada mes construya la matriz de dimensión 3x2 correspondiente a las compras de ese mes.
b) (0.5 puntos) Calcule la matriz de compras del trimestre.
c) (1.25 puntos) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

Solución

a) Sean C1, C2 y C3 los tres clientes y E la matriz correspondiente a enero, F a febrero y M a marzo.

$$E = \begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline C1 & 9 & 5 \\ C2 & 3 & 7 \\ C3 & 4 & 6 \end{array} \qquad F = \begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline C1 & 18 & 10 \\ C2 & 6 & 14 \\ C3 & 5 & 7 \end{array} \quad y \quad M = \begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline C1 & 0 & 0 \\ C2 & 6 & 14 \\ C3 & 5 & 7 \end{array}$$

b) La matriz T de compras del trimestre viene dada por la suma de las matrices de los 3 meses.

$$T = E + F + M = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline C1 & 27 & 15 \\ C2 & 15 & 35 \\ C3 & 14 & 20 \end{array}$$

c) La matriz de precios es $P = \begin{array}{c|c} A & 80 \\ B & 100 \end{array}$

La facturación por cliente viene dada por el producto de las matrices T y P

$$T \cdot P = \begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2160+1500 \\ 1200+3500 \\ 1120+2000 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} C1 & 3660 \\ C2 & 4700 \\ C3 & 3120 \end{array}$$

El cliente 1 gastó: 3660 € ; el cliente 2: 4700 € y el cliente 3: 3120 €

La facturación total es la suma de la de los tres clientes:
3660 + 4700 + 3120 = 11480 €

EJERCICIO 2

En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km², viene dada por la función $f(t) = \frac{11t+20}{t+2}$**,** siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a) (0'5 puntos) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla?
b) (1'25 puntos) Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo.
c) (0'75 puntos) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?

Solución

La superficie afectada, en km², viene dada por la función $f(t) = \frac{11t+20}{t+2}$ siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a)
¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla?

La superficie afectada inicialmente (t = 0), en km², **es** f(0) = 20/2 = **10 km²**.

b)
Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo.

Vamos a estudiar la monotonía (estudio de f'(t)) para t > 0.

$$f(t) = \frac{11t+20}{t+2} \rightarrow f'(t) = \frac{11(t+2)-1\cdot(11t+20)}{(t+2)^2} = \frac{+2}{(t+2)^2}$$

Como f'(t) > 0, para cual valor de t > 0, la función f(t) siempre es creciente por tanto **la mancha siempre crece con el tiempo "t".**

c)
¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?
Vamos a calcular el límite de f(t) cuando "t" tiende a infinito.

$\lim_{x\to\infty} f(t) = \lim_{x\to\infty} \frac{11t+20}{t+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{11t}{t} = \lim_{x\to\infty}(11) = 11$, por tanto **la mancha nunca llegará a los 11 km².**

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades P(A) = 0'60 y P(B) = 0'25. Determine las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A\cup B$ y $A\cap B$ en cada uno de los siguientes supuestos:
a) (0'5 puntos) Si A y B fuesen incompatibles.
b) (1 punto) Si A y B fueran independientes.
c) (1 punto) Si p(A/B) = 0'40.

Solución

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades P(A) = 0'60 y P(B) = 0'25.

a)
Si A y B fuesen incompatibles.

Si A y B fuesen incompatibles, sabemos que **$p(A\cap B) = 0$**, luego **$p(A\cup B) =$** $p(A) + p(B) - p(A\cap B) =$
= 0'60 + 0'25 - 0 = **0'85**.

(b)
Si A y B fuesen independientes.

Si A y B fuesen incompatibles, sabemos que **$p(A\cap B) =$** $p(A)\cdot p(B)$ = 0'60·0'25 = **0'15**, luego
$p(A\cup B) =$ $p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'60 + 0'25 – 0'15 = **0'70**.

c)
Si p(A/B) = 0'40, como $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, tenemos **$p(A\cap B) =$** $p(B)\cdot p(A/B)$ = 0'25·0'40 = **0'1**, luego
$p(A\cup B) =$ $p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'60 + 0'25 – 0'1 = **0'75**.

EJERCICIO 4

El peso de las calabazas de una determinada plantación sigue una ley Normal con desviación típica 1200 g.
a) (2 puntos) Halle el tamaño mínimo de la muestra que se ha de elegir para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio con un error menor de 450 g.
b) (0'5 puntos) Para el mismo nivel de confianza, indique, razonando la respuesta, si el error aumenta o disminuye al aumentar el tamaño de la muestra.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es* $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de donde* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Halle el tamaño mínimo de la muestra que se ha de elegir para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio con un error menor de 450 g.

Datos del problema: $\sigma = 1200$; $E < 450$; nivel de confianza = 95% = 0'95 = $1 - \alpha$, de donde α = 0'05

De $1 - \alpha$ = 0'95, tenemos α = 1- 0'95 = 0'05, de donde $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975 mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'975 vemos que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'975}$ = 1'96, por tanto tamaño mínimo pedido es:

n > $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 1200}{450}\right)^2$ ≅ 27'318, es decir **el tamaño mínimo es n = 28**.

b)
Para el mismo nivel de confianza, indique, razonando la respuesta, si el error aumenta o disminuye al aumentar el tamaño de la muestra.

Sabemos que el *error máximo* de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por **tanto si aumentamos el tamaño de la muestra "n" el error disminuye**, porque dividimos por una cantidad mayor ($\sqrt{n}$).