SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2012 (COMÚN)
OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$y + 2x \geq 2;\ 2y - 3x \geq -3;\ 3y - x \leq 6.$$

a) (1 punto) Represente gráficamente dicho recinto.
b) (1 punto) Calcule sus vértices.
c) (0'5 puntos) Obtenga el valor mínimo de la función *F(x,y) = 2x - y* en el recinto anterior, así como donde lo alcanza.

Solución

(a) y (b)

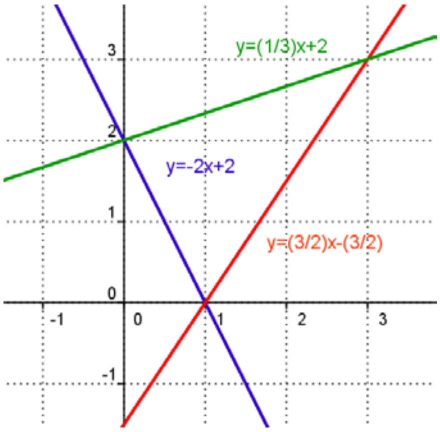
Las desigualdades $y + 2x \geq 2$; $2y - 3x \geq -3$; $3y - x \leq 6$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

$$y + 2x = 2;\quad 2y - 3x = -3;\quad 3y - x = 6,$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -2x + 2;\quad y = (3/2)x - (3/2);\quad y = (1/3)x + 2,$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = -2x + 2$ e $y = (3/2)x - (3/2)$; tenemos $-2x + 2 = (3/2)x - (3/2)$, de donde "$-4x+4 = 3x-3$", es decir sale $7=7x$, de donde "$x = 1$" e "$y = 0$", y el punto de corte es A(1,0)

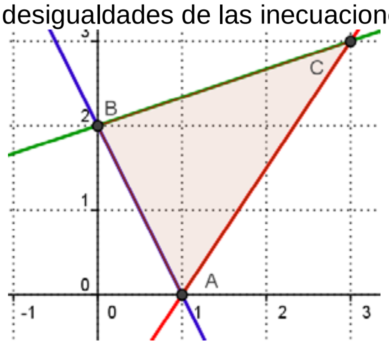
De $y = -2x + 2$ e $y = (1/3)x + 2$; tenemos $-2x + 2 = (1/3)x + 2$, de donde "$-6x+6 = x+6$", es decir sale $0=7x$, de donde "$x = 0$" e "$y = 2$", y el punto de corte es B(0,2)

De $y = (1/3)x + 2$ e $y = (3/2)x - (3/2)$; tenemos $2x + 12 = 9x - 9$, de donde "$21 = 7x$", de donde "$x = 3$" e "$y = 3$", y el punto de corte es C(3,3)

Fijándonos en la resolución de las ecuaciones los vértices son:

A(1,0); B(0,2) y el C(3,3).

El recinto, fijándonos de nuevo en las desigualdades de las inecuaciones es:



(c)

Consideremos la función *F(x,y) = 2x - y*.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afianza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(1,0); B(0,2) y el C(3,3).

F(1,0) = 2 - 0 = 2, F(0,2) = 0 - 2 = -2, F(3,3) = 6 - 3
Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es -2** (el valor menor en los vértices) **y se alcanza en el punto (0,2).**

EJERCICIO 2 (A)

a) (1'5 puntos) Sea la función f(x) = $\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$
Determine los valores de a y b, para que la función f sea derivable en x = 2.
b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g(x) = $\frac{x+2}{x-1}$, en el punto de abscisa x=0.

Solución

a)
Sea la función f(x) = $\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$
Determine los valores de a y b, para que la función f sea derivable en x = 2.

La función "$ax^2 + 3x$" es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en $(-\infty,2)$.
La función "$x^2 - bx - 4$" es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en $(2,+\infty)$.
Veamos la continuidad en x = 2

f(x) es continua en x = 2 si f(2) = $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.
f(2) = $a(2)^2 + 3(2) = 4a + 6$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax2 + 3x) = 4a + 6$;. $\lim_{x\to 2^+} f(x)= \lim_{x\to 2^+} (x^2- bx-4) = 4-2b-4 = -b$.
Como los tres valores tienen que ser iguales (para que sea continua en "2"), tenemos **4a + 6 = – 2b**.

f(x) = $\begin{cases} ax^2+3x & si \quad x\le 2 \\ x^2-bx-4 & si \quad x>2 \end{cases}$; f'(x) = $\begin{cases} 2ax+3 & si \quad x\le 2 \\ 2x-b & si \quad x>2 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2ax+3) = 4a+3$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x-b) = 4 - b$, como $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, tenemos la ecuación **4a+3 = 4 – b**.
Resolvemos el sistema

4a + 6 = – 2b
4a+3 = 4 – b. $E_2 - E_1 \rightarrow$ -3 = 4 + b, de donde **b = -7**, luego 4a + 6 = 14, por tanto **a = 2.**
b)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g(x) = $\frac{x+2}{x-1}$, en el punto de abscisa x=0.
La recta tangente en x = 0 es " y – g(0) = g'(0)(x – 0) "
g(x) = $\frac{x+2}{x-1}$, de donde g(0) = 2/-1 = -2.
g'(x) = $\frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$, de donde g'(0) = -3/1 = -3.
La recta tangente pedida es **y + 2 = -3x**, o bien **y = -3x-2**.

EJERCICIO 3 (A)

Una compañía de seguros ha hecho un seguimiento durante un año a 50000 coches de la marca A, a

20000 coches de la marca B y a 30000 coches de la marca C, que tenía asegurados, obteniendo que, de ellos, habían tenido accidente 650 coches de la marca A, 200 de la marca B y 150 de la marca C. A la vista de estos datos:
a) (1’25 puntos) ¿Cuál de las tres marcas de coches tiene menos proporción de accidentes?
b) (1’25 puntos) Si, elegido al azar uno de los coches observados, ha tenido un accidente, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

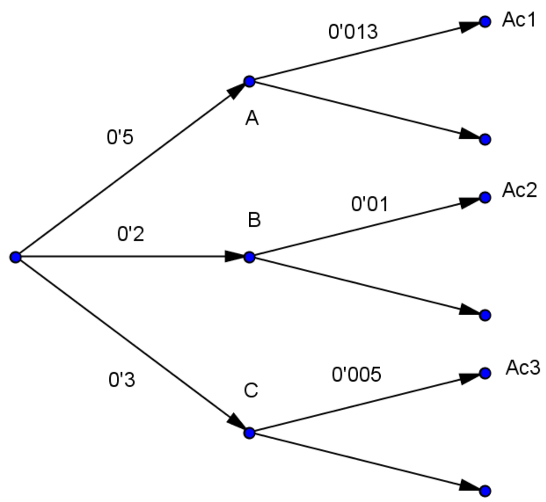
Solución

Una compañía de seguros ha hecho un seguimiento durante un año a 50000 coches de la marca A, a 20000 coches de la marca B y a 30000 coches de la marca C, que tenía asegurados, obteniendo que, de ellos, habían tenido accidente 650 coches de la marca A, 200 de la marca B y 150 de la marca C. A la vista de estos datos:

Llamemos A , B , C, Ac_1 , Ac_2 y Ac_3, "Coche de la marca A”, “Coche de la marca B”, “Coche de la marca C”, “Coche accidentado de A”, “Coche accidentado de B” y “Coche accidentado de C”

Del enunciado vemos que p(A) = 50000/100000 = 0’5, p(B) = 20000/100000 = 0’2, p(C) = 30000/100000 = = 0’3, $p(Ac_1/A)$ = 650/50000 = 0’013, $p(Ac_2/B)$ = 200/20000 = 0’01 y $p(Ac_3/C)$ = 150/30000 = 0’005.

Todo esto se observa mejor en el siguiente diagrama de árbol.



a)
¿Cuál de las tres marcas de coches tiene menos proporción de accidentes?

p(accidentes marca A) = p(A). $p(Ac_1/A)$ = 0’5.0’013 = 0’0065 = 0’65%
p(accidentes marca B) = p(B). $p(Ac_2/B)$ = 0’2.0’01 = 0’002 = 0’2%
p(accidentes marca C) = p(C). $p(Ac_3/C)$ = 0’3.0’005 = 0’0015 = 0’15%.

Vemos que la marca que menos accidentes tiene es la C.

b)
Si, elegido al azar uno de los coches observados, ha tenido un accidente, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

Nos piden **p(C/accidente)** = $\dfrac{p(\text{ C y accidente})}{p(\text{accidente})} = \dfrac{p(C).p(Ac_3/C)}{p(A).p(Ac_1/A)+p(B).p(Ac_2/B)+p(C).p(Ac_3/C)} =$

$= \dfrac{0'0015}{0'0065+0'002+0'0015}$ = 0’0015/0’01 = **0’15**

EJERCICIO 4 (A)

De una muestra aleatoria de 120 alumnos presentados a las Pruebas de Acceso, sólo 15 han resultado no aptos.
(1’5 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 99%, para estimar la proporción de alumnos que han resultado aptos en dicha prueba.
b) (1 punto) Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar

la proporción de alumnos aptos, cometiendo un error inferior al 5%?

Solución

a)

Calcule un intervalo de confianza, al 99%, para estimar la proporción de alumnos que han resultado aptos en dicha prueba.

Para construir el intervalo:

- Se elige un **estimador** del parámetro que se desea estimar ($\overline{X}$ para **μ**, $\hat{p}$ para **p**), en nuestro caso es de proporción luego es $\hat{p}$ (no aptos) = $\frac{15}{120}$ = 0’125, por tanto $\hat{q}$ = 0’875.

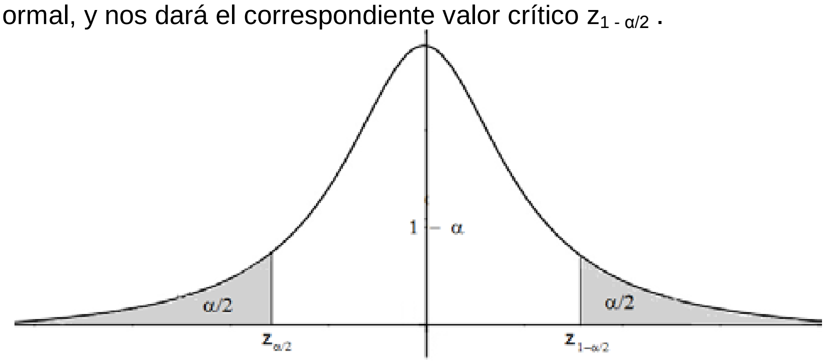
- Se elige *un nivel de confianza 1 – α* con el que se desea construir el intervalo, que nos lo dan y es del 98%, es decir 1 – α = 99% = 0’99, de donde α = 0’01 = 1% como *nivel de significación*.

- El intervalo centrado en el estadístico $\hat{p}$ obtenido en la muestra que sería:

$$\textbf{I.C.} = \textbf{I(p)} = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \text{ para estimar } \mathbf{p}$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ tal que $p(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$, siendo 1 – α el nivel de confianza elegido.

De la igualdad $p(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$, se deduce que $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.



$p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01/2 = 0'995$, mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor más próximo a 0’995 es la mitad entre 0.9949 y 0.9951, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = (2’57+2’58)/2 = 2’575. Por tanto **el intervalo de confianza pedido es**

$$\textbf{I.C.} = \textbf{I}_{100(1-\alpha)\%}\textbf{(p)} = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$= \left(0'875 - 2'575.\sqrt{\frac{0'875.0'125}{120}}, 0'875 + 2'575.\sqrt{\frac{0'875.0'125}{120}}\right) =$$

= (0’875 – 0’07774 ; 0’875 – 0’07774) = **(0’79726; 0’95274)**

b)

Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción de alumnos aptos, cometiendo un error inferior al 5%?

Sabemos que el error máximo = E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, de donde $n \ge \frac{z_c^2 \cdot \hat{p}.\hat{q}}{E^2}$, en nuestro caso:

$n \ge \frac{z_c^2 \cdot \hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{2'575^2 \cdot 0'875.0'125}{0'05^2} \cong 290'089$, por tanto **el tamaño mínimo de la muestra es n = 291**.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A.X + A^t = I_2$.
b) (0'5 puntos) ¿Qué requisitos mínimos debe de cumplir una matriz B para que pueda realizarse el producto A.B?
c) (0'5 puntos) ¿Y para el producto 3.B.A?

Solución

a)
Resuelva la ecuación matricial $A.X + A^t = I_2$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

De $A.X + A^t = I_2$., tenemos $A.X = I_2 - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, es decir $A.X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Veamos si la matriz A tiene inversa A^{-1}, con lo cual podremos multiplicar por la izquierda la expresión anterior y ya tendríamos X.
A tiene inversa si, mediante transformaciones elementales, podemos pasar de $(A|I_2)$ a $(I_2|A^{-1})$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2-2F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)^{F_1+F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$, por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^{-1}.A.X = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

b)
¿Qué requisitos mínimos debe de cumplir una matriz B para que pueda realizarse el producto A.B?

Como A es una matriz 2x**2**, para poder multiplicar A.B, B tiene que tener un orden **2**xn, donde "n" tiene que ser un número natural mayor o igual a 1.

c)
¿Y para el producto 3.B.A?

Como A es una matriz **2**x2, para poder multiplicar B.A, B tiene que tener un orden mx**2**, donde "m" tiene que ser un número natural mayor o igual a 1.

EJERCICIO 2 (B)

Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & si \quad 0 \le t \le 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \le 10 \end{cases}$

a) (0'75 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que B sea una función continua.
b) (1 punto) Para a = 8 represente su gráfica e indique en qué periodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.
c) (0'75 puntos) Para a = 8 indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los 6 primeros años y a cuanto asciende su valor.

Solución

$B(t) = \begin{cases} at - t^2 & si \quad 0 \le t \le 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \le 10 \end{cases}$, beneficio, en millones de euros, en función del tiempo "t".

a)
Calcule el valor del parámetro a para que B sea una función continua.

La función "$at - t^2$" es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en (0,6).
La función "2t" es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en (6,10).

Como tiene que ser continua en t = 6, tenemos que "$B(6) = \lim_{t\to 6^-} B(t) = \lim_{t\to 6^+} B(t)$".

$B(6) = 6a - 36$; $\lim_{t\to 6^-} B(t) = \lim_{t\to 6^-} (at - t^2) = 6a - 36$; $\lim_{t\to 6^+} B(t) = \lim_{t\to 6^+} (2t) = 12$.

Como los tres valores tienen que ser iguales (para que sea continua en "6"), tenemos $6a - 36 = 12$, **de donde a = 8.**

Luego B(t) = $\begin{cases} 8t - t^2 & si \quad 0 \le t \le 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \le 10 \end{cases}$, beneficio, en millones de euros, en función del tiempo "t".

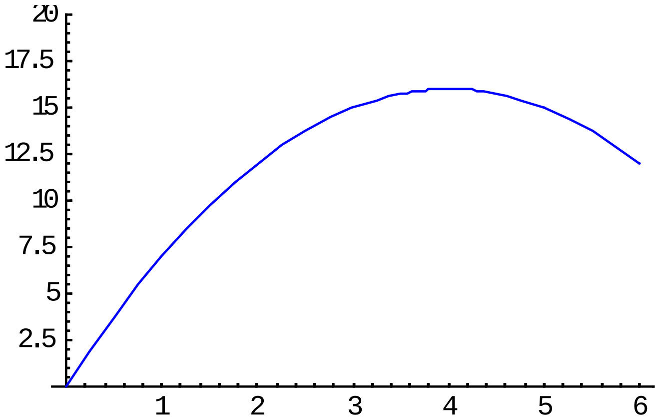
b)

Para a = 8 represente su gráfica e indique en qué periodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.

Si $0 \le t \le 6$, B(t) = $- t^2 + 8t$, cuya gráfica es una parábola, tiene las ramas hacia abajo (∩), porque el nº que multiplica a t^2 es negativo, con B(0) = 0, B(6) = 12 y con vértice en la abscisa en t = -8/2(-1) = 4, que sabemos es un máximo.

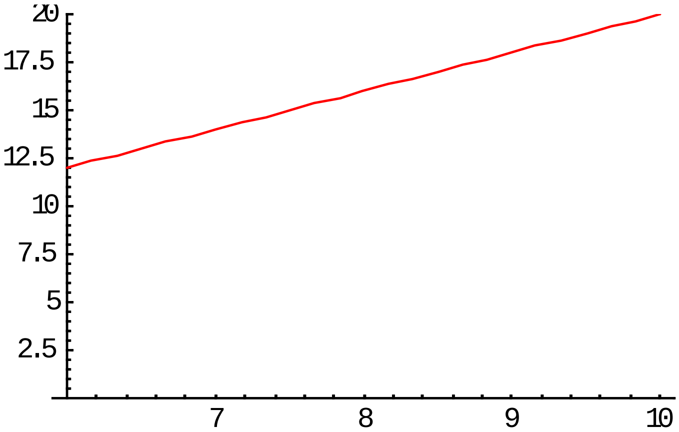
El vértice es V(4,B(4)) = V(4,16).

La gráfica de la parábola, ente 0 y 6, es:

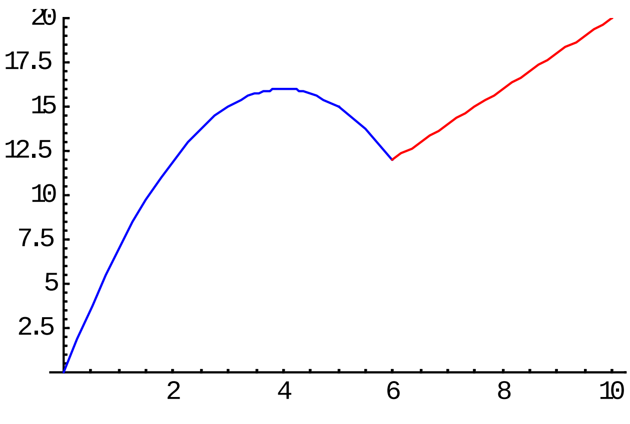


Si $6 \le t \le 10$, B(t) = 2t, tiene por gráfica un segmento con b(6) = 12 y B(10) = 20

Su gráfica es



Juntando ambas gráficas tenemos que la gráfica de B(t) es:



Observando la gráfica crece en (0,4) ∪ (6,10), y decrece en (4,6).

c)

Para a = 8 indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los 6 primeros años y a cuanto asciende su valor.

Ya hemos visto que en $0\le t \le 6$, $B(t) = -t^2 + 8t$, cuya gráfica es una parábola, tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a t^2 es negativo, con B(0) = 0, B(6) = 12 y con vértice en la abscisa t = 4, que sabemos es un máximo que vale V(4,B(4)) = V(4,16), por tanto **el máximo beneficio se alcanza en el 4º año (t = 4), y alcanza un valor de 16 millones de euros.**

EJERCICIO 3 (B)

En una localidad hay sólo dos supermercados A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos.
Si se elige un ciudadano al azar, calcule la probabilidad de que:
a) (0'75 puntos) Compre en algún supermercado..
b) (0'5 puntos) No compre en ningún supermercado.
c) (0'5 puntos) Compre solamente en un supermercado.
d) (0'75 puntos) Compre en el supermercado A, sabiendo que no compra en el B.

Solución

Llamemos A y B a los sucesos "supermercado A" y "supermercado B", respectivamente

De, el 58% de los habitantes compra en A, tenemos p(A) = 0'58.
De, el 35% de los habitantes compra en B, tenemos p(B) = 0'35.
De, el 12% compra en ambos, tenemos p(A y B) = $p(A\cap B)$ = 0'12.

a)
Compre en algún supermercado.
Me están pidiendo p(A ó B) = $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'58 + 0'35 - 0'12 = 0'81.

b)
No compre en ningún supermercado.
Me están pidiendo p(noA y noB) = $p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan y contrario} = $p((A\cup B)^C)$ =
= 1 - $p(A\cup B)$ = 1 - 0'81 = 0'19.

c)
Compre solamente en un supermercado.
Me están pidiendo p(A y noB) + p(B y noA) = $p(A\cap B^C) + p(B \cap A^C)$ =
= $p(A) - p(A\cap B) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'58 - 0'12 + 0'35 - 0'12 = 0'69.

d)
Compre en el supermercado A, sabiendo que no compra en el B.
Me están pidiendo p(A/noB) = $\dfrac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A) - p(A\cap B)}{1 - p(B)}$ = (0'58-0'12)/(1-0'35) $\cong$ 0'70769.

EJERCICIO 4 (B)

Se considera que, a lo sumo, el 5% de los artículos guardados en un almacén son defectuosos. Pasado un tiempo, la persona encargada del mantenimiento del almacén decide investigar si esta estimación es adecuada. Para ello, escoge aleatoriamente 300 artículos de los que 35 están defectuosos.
a) (1'5 puntos) Plantee un contraste de hipótesis ($H_0: p \le 0'05$) para determinar si ha aumentado la proporción de artículos defectuosos. Obtenga la región crítica para un nivel de significación del 5%.
b) (1 punto) ¿Qué conclusión se obtiene con los datos muestrales observados?

Solución

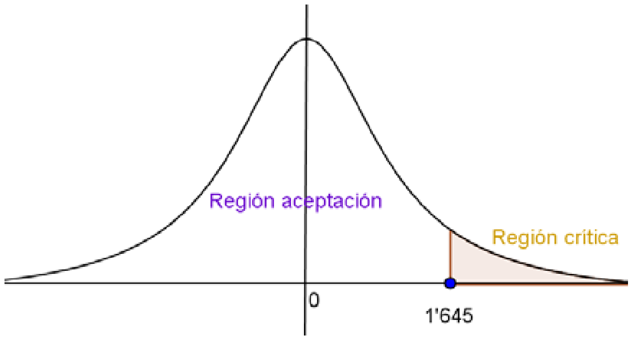
(a) y (b)
Datos del problema: p_0 = 5% = 0'05; n = 300; $\hat{p}$ = 35/300 $\cong$ 0'11667; α = 5% = 0'05.

Etapa 1: Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \le 0'05$ (a lo sumo el 5% defectuosos) y $H_1 : p_0 > 0'05$, la cual nos indica la dirección del contraste, es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico.

Etapa 2: El nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos 1 - α = 0,95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es la mitad de 0'9495 y 0'9505, que corresponde a $z_{1-\alpha}$ = (1'64+1'65)/2 =
= 1'645 , con lo cual el **valor crítico** es $z_{1-\alpha}$ = 1'645 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapa 3 y 4: En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada , N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} =$

$$= \frac{0'11667 - 0'06}{\sqrt{\frac{0'05 \cdot 0'95}{300}}} \cong 5'29839.$$

Etapa 5: Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 5'29839 es mayor que el **valor crítico** $z_{1-\alpha}$ = 1,645, vemos que se encuentra en la zona de rechazo o región crítica. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la aceptar hipótesis nula H_0: $p_0 \le 0'05$, y aceptamos la hipótesis alternativa H_1: $p_0 > 0'05$**.

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos que más del 5% de los artículos del almacén están defectuosos.