ANDALUCÍA JUNIO 2004

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Puede usar una calculadora no programable y no gráfica.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

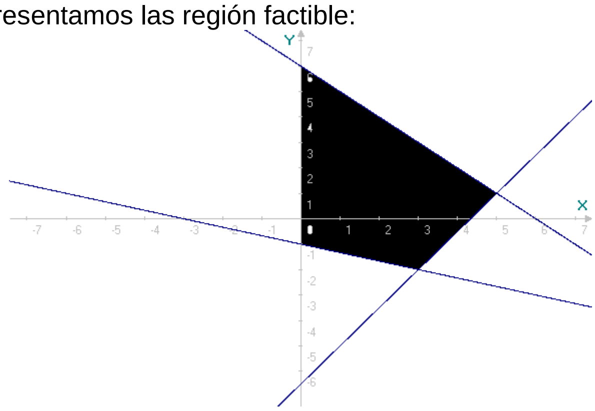
OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+y\le 6 \\ 3x-2y\le 13 \\ x+3y\ge -3 \\ x\ge 0 \end{cases}$

a) Dibuje el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtenga sus vértices. **(2 puntos)**
b) Halle los puntos del recinto en los que la función $F(x,y)=x-2y$ toma los valores máximo y mínimo, y determine éstos. **(1 punto)**

Solución:
a) En primer lugar representamos las región factible:



En segundo lugar calculamos los vértices:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 3x-2y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=12 \\ 3x-2y=13 \end{cases} \Rightarrow 5x=25 \Rightarrow x=5;\ y=6-5=1 \Rightarrow A=(5,1)$$

$$\begin{cases} 3x-2y=13 \\ x+3y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=13 \\ -3x-9y=9 \end{cases} \Rightarrow -11y=22 \Rightarrow y=-2;\ x=-3+6=3 \Rightarrow B=(3,-2)$$

$$\begin{cases} x+3y=-3 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow C=(0,-1)$$

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow D=(0,6)$$

b) Los puntos del recinto (vértices) en los que la función $F(x, y) = x - 2y$ toma los valores máximo y mínimo:

$$\begin{cases} F(5,1) = 5 - 2 = 3 \\ F(3,-2) = 3 + 4 = 7 \\ F(0,-1) = 0 + 2 = 2 \\ F(0,6) = 0 - 12 = -12 \end{cases} \Rightarrow \textit{Luego el máximo está en } B = (3,-2) \textit{ y el mínimo en } C = (0,6)$$

EJERCICIO 2

La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión:

$$T(t) = 40t - 10t^2 \ \ con\ \ 0 \le t \le 4$$

a) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza. **(1.5 puntos)**
b) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante? **(1.5 puntos)**

Solución:

a) Observamos que la función T (t) es una función cuadrática y por lo tanto su representación gráfica corresponde a una parábola.

Punto de corte con los ejes:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow T(t) = 0 \Rightarrow (0,0) \\ T(t) = 0 \Rightarrow 40t - 10t^2 = 0 \Rightarrow t(40-10t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow (0,0) \\ 40 - 10t = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow (4,0) \end{cases} \end{cases}$$

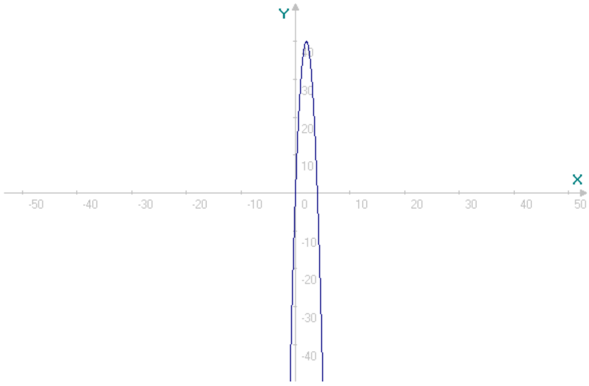
Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$$\left.\begin{array}{l} T'(t) = 40 - 20t = 0 \Rightarrow t = 2 \\ T(2) = 40 \cdot 2 - 10 \cdot 2^2 = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,40)$$

$$(-\infty, 2)\ T(t)\ es\ creciente;\ (2,\infty)\ T(t)\ es\ decreciente \Rightarrow (2,40)\ es\ un\ máximo.$$

Concavidad, convexidad, y puntos de inflexión:

$$T''(t) = -20 \Rightarrow La\ \ función\ T(t)\ es\ siempre\ cóncava.$$



La temperatura máxima es de 40 grados centígrados.

b) $T(1) = 40 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 = 30\ grados\ centígrados.$

$$T(t) = 30 \Rightarrow 40t - 10t^2 = 30 \Rightarrow 10t^2 - 40t + 30 = 0 \Rightarrow simplificamos \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow A\ las\ 3\ horas\ también\ alcanza\ 30\ grados\ centígrados.$$

EJERCICIO 3

Parte I

María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

a) Calcule la probabilidad de que gane Laura. **(1 punto)**
b) Calcule la probabilidad de que gane María. **(1 punto)**

Solución:

Existen 36 sucesos posibles al lanzar dos dados:

(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6) 6 sucesos corresponden a sacar el mismo resultado.

(3,4) (4,3) (2,5) (5,2) (1.6) (6,1) 6 sucesos corresponden a sacar en la suma de ambos.

$$a)\ P(gane\ Laura) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$b)\ P(gane\ María) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Parte II

Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95% ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372.6, 392.2).

a) Calcule el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado. **(1 punto)**
b) ¿Cuál sería el error de su estimación, si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86.9%? **(1 punto)**

Solución:

$$a)\ 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 372.6 \\ \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 392.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} - 1.96 \dfrac{60}{\sqrt{n}} = 372.6 \\ \bar{X} + 1.96 \dfrac{60}{\sqrt{n}} = 392.2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$restamos\ ambas\ ecuaciones \Rightarrow -\frac{235.2}{\sqrt{n}} = -19.6 \Rightarrow n = 144$$

$$\bar{X} = 392.2 - 1.96 \frac{3600}{720} = 382.4$$

b) $1-\alpha = 0.869 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.0655 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.9345 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.51$

$$E = \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm 1.51 \cdot \frac{60}{\sqrt{225}} = \pm 6.04$$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz P que verifica $B\cdot P-A=C^t$. (C^t, indica transpuesta de C) **(2 puntos)**

b) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A\cdot M\cdot C$. **(0.5 puntos)**

c) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t\cdot N$ sea una matriz cuadrada. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) $B\cdot P=C^t+A \Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot P=B^{-1}\cdot(C^t+A)\Rightarrow P=B^{-1}\cdot(C^t+A)$

Vamos a hacer la inversa de B:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Hagamos C^t+A:

$$C^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix};\ A+C^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos P:

$$P=B^{-1}\cdot(C^t+A)=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & -\frac{3}{2}\\ -5 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

b) A es de dimensión 2x3 y C es de dimensión 3x2.

Para poder realizar el producto $A\cdot M$, M debe tener 3 filas.
Para poder realizar el producto $M\cdot C$, M debe tener 3 columnas.

Luego M ha de ser de dimensión 3x3.

c) La matriz C tiene dimensión 3x2, luego su transpuesta tendrá dimensión 2x3, y para que sea posible el producto $C^t\cdot N$, N debe tener 3 filas. Si además queremos que la matriz producto sea cuadrada N ha de tener 2 columnas, y así la matriz producto será 2x2.

EJERCICIO 2

a) Halle los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto (-2,3). **(1.5 puntos)**

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 2$ en su punto de inflexión. **(1.5 puntos)**

Solución:

a)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow x(3x+2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x+2a = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2a}{3} \Rightarrow -\dfrac{2a}{3} = -2 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$3 = (-2)^3 + 3(-2)^2 + b \Rightarrow 3 = -8 + 12 + b \Rightarrow b = -1$$

b)

$$y' = 3x^2 - 4;\ y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0;\ y(0) = 2 \Rightarrow (0,2)$$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) = (0,2) \\ y'(x_0) = y'(0) = -4 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = -4(x-0) \Rightarrow y = -4x + 2$$

EJERCICIO 3

Parte I

Dados dos sucesos aleatorios A y B, se sabe que:

$$P(B^C) = \frac{3}{4}\ y\ P(A) = P(A/B) = \frac{1}{3}$$

(B^C indica el complementario del suceso B).

a) Razone si los sucesos A y B son independientes. **(0.75 puntos)**

b) Calcule $P(A \cup B)$. **(1.25 puntos)**

Solución:

$$a)\ P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3P(A\cap B) = P(B) \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12} = P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow Si\ son\ independientes.$$

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{4+3-1}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

Parte II

El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con una desviación típica de 0.9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtuvieron los siguientes pesos en kilos:

9.5, 10, 8.5, 10.5, 12.5, 10.5, 12.5, 13, 12.

a) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa. **(1 punto)**

b) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0.3 kg, con un nivel de confianza del 90%. **(1 punto)**

Solución:

a) $1-\alpha = 0.90 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575 \; 1-\alpha = 0.90 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

$\overline{X} = \dfrac{9.5+10+8.5+10.5+12.5+10.5+12.5+13+12}{9} = 11$ es la media muestral.

$$\left(\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \left(11 - 2.575\frac{0.9}{3}, 11 - 2.575\frac{0.9}{3}\right) \Rightarrow \mu \in (10.2275, 11.7725)$$

$b)\; 1-\alpha = 0.90 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.3 \geq 1.645\frac{0.9}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \geq 24.354225 \Rightarrow n \text{ ha de ser al menos } 25.$$