



I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

1.- Múltiplo de un número.

Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces.

De otra forma sería: un número es múltiplo de otro cuando la división del primero entre el segundo es exacto.

Ejemplo. 10 es múltiplo de 2 ya que $10 : 2 = 5$

Se representa de la forma siguiente.

$$10 = 2 \cdot 5$$

Todo número tiene infinitos múltiplos; se obtienen multiplicando sucesivamente el número por 0, 1, 2, 3, 4,etc.

2.- Divisor de un número:

Un número es divisor de otro cuando está contenido en él, un número exacto de veces.

Ejemplo: 2 es divisor de 10 ya que $10 : 2 = 5$

3.- Números pares e impares:

Se llama **número par** a todo múltiplo de 2, se representa por la expresión **2n**.

Número impar son los que no son múltiplos de 2, se representan por la expresión **2n + 1**.

4.- Propiedades de los múltiplos:

a. Todo número es múltiplo de si mismo y la unidad.

Ejemplo: $0 = 1 \cdot 0$; $1 = 1 \cdot 1$; $2 = 1 \cdot 2$

b.- El cero es múltiplo de cualquier número natural.

Ejemplo: $0 = 0 \cdot 3$; $0 = 0 \cdot 4$; $0 = 0 \cdot 6$

c.- La suma de varios múltiplos de un número es múltiplo de ese número.

$$\begin{array}{r}
60 = 4 \cdot 15 \text{ porque } 60 = 4 \cdot 15 \\
+ \\
12 = 4 \cdot 3 \text{ porque } 12 = 4 \cdot 3 \\
\text{.....} \\
72 = 4 \cdot 18 \text{ porque } 72 = 4 \cdot 18
\end{array}$$

d) La diferencia de dos múltiplos de un número es múltiplo de dicho número.

$$\begin{array}{r}
60 = 4 \cdot 15 \text{ porque } 60 = 4 \cdot 15 \\
- \\
12 = 4 \cdot 3 \text{ porque } 12 = 4 \cdot 3 \\
\hline
48 = 4 \cdot 12 \text{ porque } 48 = 4 \cdot 12
\end{array}$$



EJERCICIOS SOBRE : DIVISIBILIDAD

I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

e) Si un número es múltiplo de otro, todos los múltiplos del primero son múltiplos del segundo.

$$15 = 5 \quad \text{como } 60 = 15 \quad \text{también } 60 = 5$$

5.- Criterios de divisibilidad:

Son reglas que nos permiten averiguar, en algunos casos, si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división

a. **Divisibilidad por 2:** un número es divisible por 2 si acaba en cero o cifra par. Ejemplo.
 $4 = 2$ 2 es divisible de 4 porque $4 : 2 = 2$ Resto 0

$$10 = 2 \quad 2 \text{ es divisor de } 10 \text{ porque } 10 : 2 = 5 \text{ Resto } 0$$

b. **Divisibilidad por 3 ó 9 :** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3 ó 9, respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo } 684 &= 6 + 8 + 4 = 18, \quad 18 = 3 \text{ porque } 18 : 3 = 6 \\ 684 &= 6 + 8 + 4 = 18; \quad 18 = 9 \text{ porque } 18 : 9 = 2 \end{aligned}$$

c- **Divisibilidad por 5 :** cuando termina en 0 o en 5.

$$\text{Ejemplo: } 25 = 5 \quad 45 = 5 \quad 30 = 5$$

d. **Divisibilidad por 4 o por 25 :** si las dos últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4 o de 25 respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo: } 82 \boxed{36} &= 4 \quad \text{porque } 36 : 4 = 9 \text{ Resto } 0 \\ 82 \boxed{25} &= 25 \quad \text{porque } 25 : 25 = \text{Resto } 1 \end{aligned}$$

e. **Divisibilidad por 8 o por 125:** si las tres últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 8 o 125, respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo: } 36 \boxed{120} &= 8 \quad \text{porque } 120 : 8 = 15 \text{ Resto } 0 \\ 36 \boxed{125} &= 125 \quad \text{porque } 125 : 125 = 1 \text{ Resto } 0 \\ 36 \boxed{000} &= 8 \quad \text{ó } 125 \quad \text{porque termina en tres ceros.} \end{aligned}$$

f) **Divisibilidad por 11 :** cuando la diferencia de la suma de las cifras que ocupan lugar **par** y la suma de las cifras que ocupan el lugar **impar** es **0 , 11, o múltiplo de 11.**

$$\text{Ejemplo: } 242 = 11$$

Para ello se comprueba de la siguiente forma.

$$\begin{array}{c} \text{I P I} \\ 2 \ 4 \ 2 \quad \text{I} = 2 + 2 = 4 \quad \text{P} = 4 \quad 4 - 4 = 0 \end{array}$$

6.- Números primos y compuestos:

Un número natural distinto de 1 es primo si solo tiene como divisores el **1** y **él mismo**.



I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

Un número natural es compuesto si tiene otros divisores además del **1 y de él mismo**.

Ejemplo: 13 es primo: sus divisores son 1 y 13

12 es compuesto : sus divisores 1, 2, 3, 4, 6 y 12

7.- La Criba de Eratóstenes:

Sirve para hallar los números primos menores que 100, procediendo de la forma siguiente:

- Se escriben todos los números desde el **2** (primer número primo hasta el **100**).
- Tachando de **2 en 2** a partir del **2**, se suprimen los múltiplos del **2**.
- Se tachan de **3 en 3** a partir del **3**, se suprimen los múltiplos del **3**.
- Y así sucesivamente de **5 en 5**, de **7 en 7**, y del **11 en 11**, en el momento que no se tache ninguna se termina, y los números no tachados son primos.

Ejemplo:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

8.- Como averiguar si un número es primo o compuesto:

Para conseguir si un número es primo o compuesto, se divide por la serie de números naturales hasta llegar a una división cuyo cociente sea igual o menor que el divisor.

Ejemplo: 127 ¿primo o compuesto?

$$127 : 1 = 127 \text{ Resto } 0 ; 127 : 2 = 63 \text{ R } 1 ; 127 : 3 = 42 \text{ R } 1 ; 127 : 4 = 31 \text{ R } 3 ;$$

$$127 : 5 = 25 \text{ R } 2 ; 127 : 6 = 21 \text{ R } 1 ; 127 : 7 = 18 \text{ R } 1 ; 127 : 8 = 15 \text{ R } 7 ,$$

$127 : 9 = 14 \text{ R } 1 ; 127 : 10 = 12 \text{ R } 7 ; 127 : 11 = 11 \text{ R } 6$, como en esta operación el cociente es igual al divisor , se termina y se comprueba que solo hay una división exacta que su divisor es 127 y su resto es 0 , por lo tanto los divisores solo pueden ser 1 y 127 , por lo tanto es un número primo.

Igualmente en el momento en que haya una división de divisor distinto de uno, que sea exacta, el número es compuesto.

9.- Descomposición de un número en factores primos:

Todo número compuesto se puede expresar como un producto de factores primos, se comienza en orden desde el número 2 en adelante.



I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l}
 1 & 2 & 0 & 2 \\
 & 6 & 0 & 2 \\
 & 3 & 0 & 2 \\
 & 1 & 5 & 3 \\
 & & 5 & 5 \\
 & & 1 & 1
 \end{array}
 \qquad
 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1$$

10.- Divisibilidad por descomposición en factores.

Ejemplo: ¿ Es divisible 1680 por 120?

Para responder sin hacer la división, se descomponen los números en producto de factores primos.

$$\begin{array}{r|l}
 1680 & 2 \\
 840 & 2 \\
 420 & 2 \\
 210 & 2 \\
 105 & 3 \\
 35 & 5 \\
 7 & 7 \\
 1 & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 120 & 2 \\
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \\
 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1
 \end{array}$$

Se observa que todos los factores del 120 están comprendidos en el 1680, por lo tanto podemos decir que se puede dividir.

11.- Divisores de un número:

Para hallar todos los divisores de un número, se procede a la forma siguiente.

Ejemplo. 60

a) Se descomponen el número en producto de factores primos:

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & 1
 \end{array}
 \qquad
 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1$$

b) Se escriben las sucesivas potencias de los factores primos que hemos encontrado, empezando por el 1

- A.- 1, 2, 2². _____ 1, 2, 4.
- B.- 1, 3
- C.- 1, 5

c) Se multiplican los números de la segunda fila B por los de la fila A

- E.- 1, 2, 4, 3, 6, 12



I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

d) Se multiplican los números de la tercera fila C por los que figuran en E.

D.- 1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60

Se observa que se comienza por 1 y se termina por el mismo número.

12.- Divisores comunes de dos números:

Ejemplo: 12 y 30

Divisores de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12

Divisores de 30 : 1, 2, 3, 5, 6, 15, 30

Divisores comunes de 12 y 30 son: 1, 2, 3 y 6

Es decir aquellos números que son divisores tanto de un número como de otro.

13.- Números primos entre sí

Dos o más números se dicen que son primos entre sí, cuando su único divisor común es el 1

Ejemplo 20, 21 y 13

$$\left. \begin{array}{l} 20 = 2^2 \cdot 5 \cdot 1 \\ 21 = 3 \cdot 7 \cdot 1 \\ 13 = 13 \cdot 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{único divisor común es el 1, por lo tanto estos} \\ \text{números son primos entre sí.} \end{array}$$

14.- Máximo común divisor de varios números (M.C.D. o m. c. d.)

A) Se descomponen los números en producto de factores primos y a continuación se eligen los factores que se repiten en todos con menor exponente.

Ejemplo: 36, 20, 48

$36 \begin{array}{l} 3 \ 6 \\ 1 \ 8 \\ 9 \ 3 \\ 3 \ 3 \\ 1 \ 1 \end{array} \Bigg \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array}$	$20 \begin{array}{l} 2 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 5 \ 5 \\ 1 \ 1 \end{array} \Bigg \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{array}$	$48 \begin{array}{l} 4 \ 8 \\ 2 \ 4 \\ 1 \ 2 \\ 6 \ 2 \\ 3 \ 3 \\ 1 \ 1 \end{array} \Bigg \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}$	$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 1$
			$20 = 2^2 \cdot 5 \cdot 1$
			$48 = 2^4 \cdot 3 \cdot 1$

Factor común con menor exponente $2^2 \cdot 1$, por lo tanto el m.c.d. (36,20 y 48)
 $= 2^2 \cdot 1 = 4$

B) Resolución de problemas: mediante el m.c.d.

Ejemplo.

Se quiere embaldosar una isla de 1620 cm de largo por 980 cm de ancho con baldosas cuadradas lo más grande posible y enteras. ¿Cuál será la longitud del lado de cada baldosa?



EJERCICIOS SOBRE : DIVISIBILIDAD

I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

Solución: m.c.d. (1620, 980)

$$\begin{array}{r|l} 1620 & 2 \\ 810 & 2 \\ 405 & 3 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 980 & 2 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 1 \\ 980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 1 \\ \text{m.c.d} = 2^2 \cdot 5 = 20 \text{ cm} \end{array}$$

15.- Mínimo común múltiplo de varios números:

A) Se descomponen en factores primos y se eligen los que se repiten (están en todos los números), con mayor exponente y de los que no se repiten, igualmente con mayor exponente.

Ejemplo m.c.m. (16, 12, 8)

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 16 = 2^4 \cdot 1 \\ 12 = 2^3 \cdot 3 \cdot 1 \\ 8 = 2^3 \cdot 1 \\ \text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 3 \cdot 1 \end{array}$$

B) Resolución de problemas mediante el m.c.m.

Ejemplo. Solución m-c-m-

Una sirena toca 450 segundos, otra cada 250 segundos y una tercera cada 620 segundos. Si a las 4 horas de la mañana han coincidido tocando las tres, ¿a que hora volverán a tocar otra vez juntas?

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 1 \\ 250 = 2 \cdot 5^3 \cdot 1 \\ 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 1 \end{array}$$

m. c. m. = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 1 = 9000$ segundos, 2 horas y 30 minutos.

Vuelven a tocar juntas a las 6 horas y 30 minutos (de la mañana)

ACTIVIDADES

1.- Hacer la división $48 : 5$ y responder:

a) ¿ es 48 múltiplo de 5 ?

b) ¿ es 5 divisor de 48?

c)¿ es 48 divisible por 5?

2.- Representa que 72 es múltiplo de 9 y explicar por qué.

3.- Escribir 3 divisores de 48.

4.- Indica cuales de los siguientes números son divisibles por 9 o por 3



EJERCICIOS SOBRE : DIVISIBILIDAD

I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

684 , 254 , 2512 , 19224 , 10962.

5.- ¿Cuál es el valor que debe tener la letra a para que los números siguientes son divisibles por 3?

- a) 4 a 8 2 b) 6 0 2 a c) 8 2 6 a d) a 6 2 8

6.- Un número es divisible por 6 cuando es divisible por 2 y por 3 a la vez.

¿ Cuales de los siguientes números es divisible por 6?

12624 ; 6256 ; 984 ; 1144 ; 792 ; 1140

7.- Escribir 4 múltiplos de 7

8.- Averiguar si los siguientes números son múltiplos de 11

- a) 3443 b) 8251 c) 9207

9.- Si en la televisión las pausas publicitarias fuesen siempre de tres minutos de duración, ¿ se podría emitir en un día 122 minutos de publicidad? ¿ y 2 horas de publicidad?

10.- En una competición de atletismo, un locutor de radio dice: “ Los 196 atletas del equipo A entran en el estadio en grupos de 6 y los 164 del quipo B entran en el estadio en grupos de 4”.¿ Se ha equivocado el locutores su afirmación? ¿ Por qué?

11.- Averiguar cuales de los siguientes números son primos

- a) 201 b) 124 c) 144 d) 167

12.- Averiguar si los siguientes números son primos o compuestos

- a) 81 b) 131 c) 153 d) 239

13.- Hacer la descomposición en factores primos de:

- a) 50 b) 60 c) 70 d) 110

14.- ¿Cuál es el único número primo que es par?

15.- Hallar todos los divisores de

- a) 90 b) 160 c) 100 d) 210

16.- Hallar los divisores comunes de.

- a) 14 y 15 b) 9 y 10 c) 70 y 50 d) 15 y 30

17.- Calcular el m.c.d. de :

- a) 20 y 30 b) 34 y 30 c) 22 y 28 d) 46 y 100

18.- Hallar el m.c.d. de.

- a) 30, 50 y 70 b) 35, 70 y 100

19.- Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes pares de números:

- a) 158 y 166 b) 200 y 434 c) 510 y 610 d) 160 y 190

20.- Un barco A sale de un puerto cada 48 días y un barco B sale del mismo puerto cada 40 días. El 12 de Marzo coincidieron ambos barcos en el puerto. ¿ Qué día volverán a coincidir?

21.- Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. A las 18 y 30 de la tarde los tres coinciden. Averiguar las veces que volverán a



EJERCICIOS SOBRE : DIVISIBILIDAD

I.E.S. Torre Almirante
Dpto. Matemáticas

coincidir en los cinco minutos siguientes.

22.- El suelo de una habitación que tiene 5 m de largo y 3 m de ancho, “ se quiere embaldosar”. Calcular el largo de la baldosa para que el número de ellas que se coloquen sea mínimo y no haga falta cortarlas.

23.- ¿ Cuánto mide la mayor baldosa cuadrada que cabe un número exacto de veces en una sala de 8 m de longitud y 6,4 m de anchura?