BLOQUE II
GEOMETRÍA

Página 216

1 Considera los vectores $\vec{u}(3, 2, -1)$, $\vec{v}(-4, 0, 3)$ y $\vec{w}(3, -2, 0)$:

a) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

b) Halla m para que el vector $(2, -6, m)$ sea perpendicular a $\vec{u}$.

c) Calcula $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Resolución

a) Para que los tres vectores formen una base, han de ser L.I. Veámoslo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 28 \neq 0. \text{ Forman una base de } \mathbb{R}^3.$$

b) $(2, -6, m) \cdot (3, 2, -1) = 6 - 12 - m$

$(2, -6, m) \perp \vec{u} \iff 6 - 12 - m = 0 \iff m = -6$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-15}{\sqrt{14} \cdot 5} = -0{,}80179\ldots \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 143°\ 18'\ 3''$$

2 Halla un vector de módulo 13 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}(24, 10, 7)$ y $\vec{v}(-12, -5, 8)$.

Resolución

$\vec{u} \times \vec{v} = (115, -276, 0)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{115^2 + 276^2} = 299 = 13 \cdot 23$

El vector buscado es $\frac{1}{23}\,\vec{u} \times \vec{v} = (5, -12, 0)$.

También cumple las condiciones pedidas su opuesto: $(-5, 12, 0)$.

Soluciones: $(5, -12, 0)$ y $(-5, 12, 0)$

3 **Considera los puntos $P(2, 3, 5)$ y $Q(8, -9, 2)$:**

a) Halla el punto medio de PQ.

b) Halla el punto simétrico de P respecto de Q.

c) Obtén un punto R de PQ tal que $2\overline{PR} = \overline{RQ}$.

Resolución

a) Punto medio: $\left(\frac{2+8}{2}, \frac{3-9}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = \left(5, -3, \frac{7}{2}\right)$

b) Sea $S(\alpha, \beta, \gamma)$ el simétrico de P respecto de Q. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2+\alpha}{2} = 8 \\ \frac{3+\beta}{2} = -9 \\ \frac{5+\gamma}{2} = 2 \end{array}\right\} \quad \alpha = 14, \quad \beta = -21, \quad \gamma = -1$$

Así, el simétrico de P respecto de Q es $(14, -21, -1)$.

c) 

$\overrightarrow{PQ} = (6, -12, -3)$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (2, 3, 5) + (2, -4, -1) = (4, -1, 4)$$

4 **Dados los puntos $P(3, 2, 0)$, $Q(5, 1, 1)$ y $R(2, 0, -1)$:**

a) Halla la recta que pasa por P y Q.

b) Halla el plano que contiene a P, Q y R.

c) Halla la distancia entre P y Q.

Resolución

a) $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{PR} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, -1, 1) \times (-1, -2, -1) = (3, 1, -5) \perp \pi$

$\pi: \; 3(x-3) + 1(y-2) - 5(z-0) = 0$

$3x + y - 5z - 11 = 0$

c) $dist\,(P, Q) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

5 **Dados el punto $A(-1, 2, 3)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$, calcula razonadamente:**

a) La distancia de A a r.

b) El punto simétrico de A respecto de r.

Resolución

$R(1 + \lambda, -2 + \lambda, 1 + 2\lambda)$ es un punto genérico de r.

$\overrightarrow{AR}(2 + \lambda, -4 + \lambda, -2 + 2\lambda)$

Buscamos R para que $\overrightarrow{AR} \perp r$; es decir, $\overrightarrow{AR} \perp (1, 1, 2)$:

$$(2 + \lambda, -4 + \lambda, -2 + 2\lambda) \cdot (1, 1, 2) = 2 + \lambda - 4 + \lambda - 4 + 4\lambda = 6\lambda - 6$$

$$\overrightarrow{AR} \perp r \iff 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, $R(2, -1, 3)$ es el pie de la perpendicular de A a r.

a) $dist\,(A, r) = dist\,(A, R) = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) El simétrico de A respecto de r es el simétrico, $A'(\alpha, \beta, \gamma)$, de A respecto de R:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-1+\alpha}{2} = 2 \\ \dfrac{2+\beta}{2} = -1 \\ \dfrac{3+\gamma}{2} = 3 \end{array}\right\} \quad \alpha = 5, \ \beta = -4, \ \gamma = 3$$

Así, $A'(5, -4, 3)$.

6 **Calcula la posición relativa de la recta y el plano siguientes:**

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 0 \end{array}\right. \qquad \pi: x + y + z = 0$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} (3, -1, 0) = \vec{d}_r \,//\, r \\ (1, 1, 1) = \vec{n}_\pi \perp \pi \end{array}\right\} \ \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 2 \neq 0$$

Por tanto, $\vec{d}_r$ no es perpendicular a $\vec{n}_\pi$. Es decir, la recta no es paralela al plano, ni está contenida en él.

Conclusión: la recta corta al plano.

7 **Dadas las rectas** $r: \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$ **y** $s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$ **comprueba que se cruzan y calcula la distancia entre ellas y la ecuación de la perpendicular común.**

Resolución

Ecuaciones paramétricas de r. Llamamos $y = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} R_0(4, 0, 5) \\ \vec{d}_r(-1, 1, -1) \end{array}$$

Ecuaciones paramétricas de s:

$$s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 3\mu \end{cases} \qquad \begin{array}{l} S_0(1, -1, 0) \\ \vec{d}_s(1, -1, 3) \end{array}$$

$$\overrightarrow{R_0S_0} = (-3, -1, -5)$$

- Posición relativa:

  Vemos el rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$, $\overrightarrow{R_0S_0}$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

  Los tres vectores son L.I. Por tanto, las rectas se cruzan.

- El vector genérico $\overrightarrow{RS}(-3 + \lambda + \mu, -1 - \lambda - \mu, -5 + \lambda + 3\mu)$ tiene su origen en r y su extremo en s.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \perp r \iff \overrightarrow{RS} \perp \vec{d}_r \iff -(-3 + \lambda + \mu) + (-1 - \lambda - \mu) - (-5 + \lambda + 3\mu) = 0 \\ \overrightarrow{RS} \perp s \iff \overrightarrow{RS} \perp \vec{d}_s \iff (-3 + \lambda + \mu) - (-1 - \lambda - \mu) + 3(-5 + \lambda + 3\mu) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 7 - 3\lambda - 5\mu = 0 \\ -17 + 5\lambda + 11\mu = 0 \end{array}\right\} \lambda = -1,\ \mu = 2$$

  Por tanto, los pies de la perpendicular común a las dos rectas son:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = -1 \to R(5, -1, 6) \\ \mu = 2 \to S(3, -3, 6) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS}(-2, -2, 0) \,//\, (1, 1, 0)$$

$$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- Recta perpendicular común:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 6 \end{cases}$$

8 **Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$, es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\alpha: 2x - y + z + 1 = 0$.**

Resolución

$(1, -2, 0) \times (0, 0, 1) = (-2, -1, 0) \,//\, (2, 1, 0) = \vec{d}_r$

Sea π el plano buscado y $\vec{n}$ su vector normal. Entonces:

$\pi \,//\, r \Rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}$

$\pi \perp \sigma \Rightarrow \vec{n} \perp (2, -1, 1)$

Por tanto, $\vec{n} = (2, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -2, -4)$.

Ecuación de π: $1(x - 1) - 2(y - 0) - 4(z + 1) = 0$

$$x - 2y - 4z - 5 = 0$$

9 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta perpendicularmente a la recta AB, siendo $A(2, 0, 2)$ y $B(-1, 2, 1)$.**

Resolución

$\overrightarrow{AB} = (-3, 2, -1) = \vec{d}_r$

$r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ es la recta AB.

Tomamos un vector genérico $\overrightarrow{OR}$ con origen en O y extremo variable en r:

$$\overrightarrow{OR}(2 - 3\lambda, 2\lambda, 2 - \lambda)$$

Obligamos a que $\overrightarrow{OR} \perp r$:

$(2 - 3\lambda, 2\lambda, 2 - \lambda) \cdot (-3, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow -6 + 9\lambda + 4\lambda - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Para $\lambda = \frac{4}{7}$, obtenemos $R\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{10}{7}\right)$ y $\overrightarrow{OR}\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{10}{7}\right) \,//\, (2, 8, 10) \,//\, (1, 4, 5)$

La recta buscada es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$

10 **Sean el plano $\pi: 3x - 2y + z - 1 = 0$ y las rectas:**

$$r: \begin{cases} x = \quad -\ \lambda \\ y = 2 + \ \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \quad 3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

a) Halla el ángulo que forman r y s.

b) Calcula el ángulo formado entre r y π.

c) Halla el ángulo que forma π con el plano σ determinado por r y s.

Resolución

$\vec{d}_r(-1, 1, -2) // r$, $\vec{d}_s(3, 4, 0) // s$, $\vec{n}(3, -2, 1) \perp \pi$

a) $cos\ (\widehat{r, s}) = \dfrac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \dfrac{1}{\sqrt{6} \cdot 5} = 0{,}08165 \ \rightarrow\ (\widehat{r, s}) = 85°\ 19'$

b) $sen\ (\widehat{r, \pi}) = \left|cos\ (\widehat{\vec{d}_r, \vec{n}})\right| = \left|\dfrac{-7}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right| = 0{,}76376 \ \rightarrow\ (\widehat{r, \pi}) = 49°\ 47'\ 49''$

c) r y s se cortan en (0, 2, 3), evidentemente.

Determinan un plano cuyo vector normal es:

$\vec{n}\,' = (-1, 1, -2) \times (3, 4, 0) = (8, -6, -7)$

$$cos\ (\widehat{\pi, \sigma}) = \left|cos\ (\widehat{\vec{n}, \vec{n}\,'})\right| = \frac{3 \cdot 8 + (-2) \cdot (-6) + 1 \cdot (-7)}{\sqrt{14}\sqrt{149}} =$$

$$= \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{149}} = 0{,}63495 \ \rightarrow\ (\widehat{\pi, \sigma}) = 50°\ 35'\ 1''$$

11 **Calcula la distancia que hay entre estos planos:**

$$\alpha: 2x + y - z + 1 = 0 \qquad \beta: 4x + 2y - 2z + 7 = 0$$

Resolución

$\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{1}{7}$; por tanto, α y β son paralelos.

El punto $A(0, 0, 1) \in \alpha$. Por tanto:

$$dist\ (\alpha, \beta) = dist\ (A, \beta) = \frac{|4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24} \simeq 1{,}02$$

12 **Calcula m para que r y s estén en el mismo plano:**

$$r: \frac{2x-1}{2} = 1 - y = z \qquad s: \begin{cases} x + y + z + m = 0 \\ 3x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} r: \dfrac{x-(1/2)}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1} \qquad \vec{d}_r = (1, -1, 1) \\ \\ s: \vec{d}_s = (1, 1, 1) \times (3, 0, -4) = (-4, 7, -3) \end{array}\right\}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas. Veamos cómo ha de ser m para que se corten.

Conviene expresar cada una de las dos rectas como intersección de dos planos. Obligamos a que los cuatro planos tengan algún punto común:

$$r: \begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} = z \ \rightarrow \ 2x - 2z = 1 \\ 1 - y = z \ \rightarrow \ y + z = 1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x + y + z = -m \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que el determinante de la matriz ampliada sea cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -m \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -2m - 8; \ \ -2m - 8 = 0 \ \Leftrightarrow \ m = -4$$

Si $m = -4$, las dos rectas se cortan. Por tanto, están en un mismo plano.

13 **Halla un punto de la recta s: $x = -y = z$ tal que su distancia a $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ sea igual a 1 unidad.**

Resolución

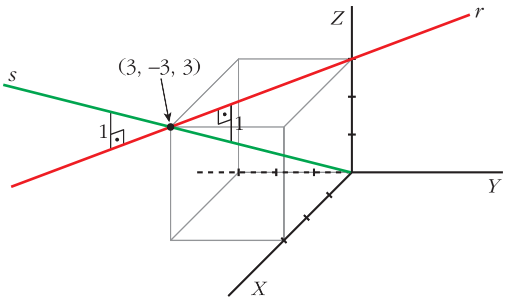
Un punto genérico de r: $R(\lambda, -\lambda, 3)$

Un punto genérico de s: $S(\mu, -\mu, \mu)$

Las dos rectas se cortan en $(3, -3, 3)$.

Al ser perpendicular a r desde s, la coordenada z debe distar 1 en ambas rectas. Por tanto, hay dos puntos de s cuya distancia a r es 1:

$(2, -2, 2)$ y $(4, -4, 4)$



14 **Calcula las ecuaciones de la recta r' sabiendo que es la proyección ortogonal de r sobre π:**

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{cases} \qquad \pi: x - y + 2z + 4 = 0$$

Resolución

La recta r' es intersección de dos planos: el π y un plano α que contiene a r y es perpendicular a π.

Un vector normal a α es perpendicular al vector dirección de r y al vector normal a π.

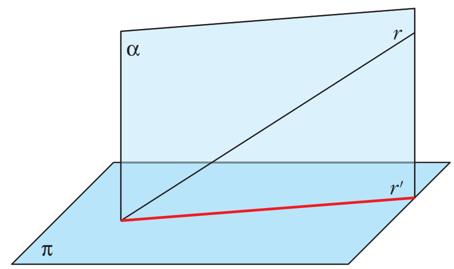
Por tanto: $(1, 3, 0) \times (1, -1, 2) = (6, -2, -4) \,//\, (3, -1, -2) = \vec{n};\ \vec{n} \perp \alpha$

$(0, -2, 3) \in \alpha$

α: $3(x - 0) - (y + 2) - 2(z - 3) = 0$

$3x - y - 2z + 4 = 0$

La recta es r': $\begin{cases} 3x - y - 2z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$



15 **Dada la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$ y el plano $\beta: x - 3y - z + 6 = 0$, halla la ecuación de un plano paralelo a β que diste de la recta r 3 unidades.**

Resolución

Para que el problema tenga solución, la recta debe ser paralela al plano. Comprobemos que es así:

$\vec{d}_r = (2, -5, 0) \times (1, 0, 5) = (-25, -10, 5) \,//\, (5, 2, -1)$

$\vec{n} = (1, -3, -1) \perp \beta$

$(5, 2, -1) \cdot (1, -3, -1) = 0 \Rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n} \Rightarrow r \,//\, \beta$

La recta es paralela al plano.

Obtenemos un punto de la recta dando un valor a x. Por ejemplo, para $x = -2 \to$ $\to R(-2, -1, -1)$

Un plano cualquiera paralelo a β es de la forma: $\alpha: x - 3y - z + k = 0$

La distancia de r a α es igual a la distancia de R a α y debe ser igual a 3:

$$dist\,(R, \alpha) = \frac{|-2 - 3(-1) - (-1) + k|}{\sqrt{1^2 + 3^3 + 1^2}} = 3$$

$2 + k = \pm 3\sqrt{11} \to k = -2 + 3\sqrt{11}$

Solución: Hay dos planos que cumplen esta condición:

$$\alpha_1: x - 3y - z - 2 - 3\sqrt{11} = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2: x - 3y - z - 2 + 3\sqrt{11} = 0$$

16 **El plano $2x - y + 3z - 6 = 0$ corta a los ejes coordenados en los puntos P, Q y R.**

a) Calcula el área del triángulo PQR.

b) Halla el volumen del tetraedro de vértices P, Q, R y el origen de coordenadas.

Resolución

Puntos de corte con los ejes: $P(3, 0, 0)$, $Q(0, -6, 0)$, $R(0, 0, 2)$

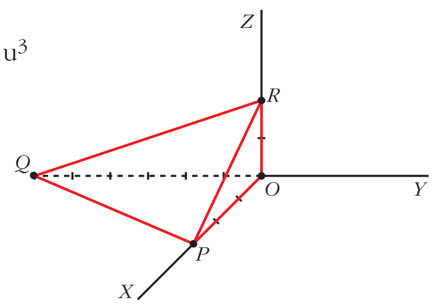
a) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -6, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-3, 0, 2)$

$$\text{Área } \widehat{PQR} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|(-12, 6, -18)\right| = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$

b) Para hallar el volumen del tetraedro, podemos utilizar dos métodos.

1.er MÉTODO. Utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PO}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = 6 \text{ u}^3$$



2.° MÉTODO. Teniendo en cuenta que el tetraedro es la sexta parte de un ortoedro de dimensiones 3, 6 y 2:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 6 \text{ u}^3$$

17 **Dada la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 39 = 0$, halla:**

a) Su centro.

b) La ecuación del plano tangente en el punto $P(1, -3, 7)$.

Resolución

a) *Centro*: $C(1, -3, 0)$

b) *Radio*: $r = 7$

$(1, -3, 7)$ ¿pertenece a la superficie esférica?

$1 + 9 + 49 - 2 - 18 - 39 = 0$. Sí pertenece, pues cumple la ecuación.

(También podríamos haber comprobado que *dist* $(P, C) = 7$).

El vector $\overrightarrow{CP}$ es perpendicular al plano tangente, π:

$\overrightarrow{CP}(0, 0, 7) \,//\, (0, 0, 1)$, perpendicular a π.

Ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P es:

π: $0(x - 1) + 0(y + 3) + 1(z - 7) = 0 \;\rightarrow\; z = 7$