IV ANÁLISIS

Página 326

1 **Halla el dominio de definición de las funciones siguientes:**

a) $y = \log(1 - x)$

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$

Resolución

a) $y = \log(1 - x)$; $1 - x > 0 \rightarrow x < 1$; $Dom = (-\infty, 1)$

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; $\cos x = 0 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$Dom = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2 **Representa las funciones:**

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$

b) $y = \log_2(x + 3)$

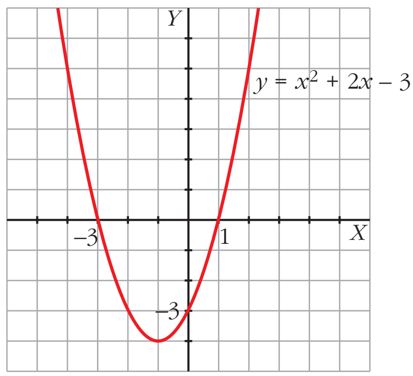
Resolución

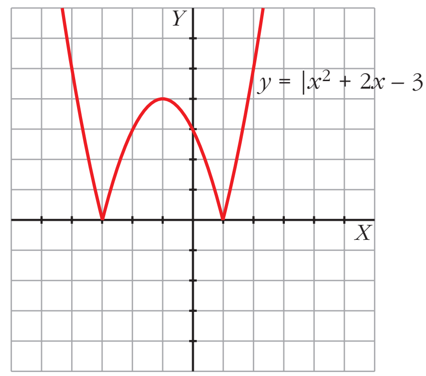
a) $y = |x^2 + 2x - 3|$. Estudiamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

Cortes con los ejes $\begin{cases} x = 0,\ y = -3 \\ y = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

Vértice $\begin{cases} x = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4 \end{cases}$

Su representación es:





Así, los valores positivos quedan igual, y para los negativos tomamos sus opuestos.

b) $y = log_2\,(x + 3) \;\rightarrow\; Dom = (-3, +\infty)$

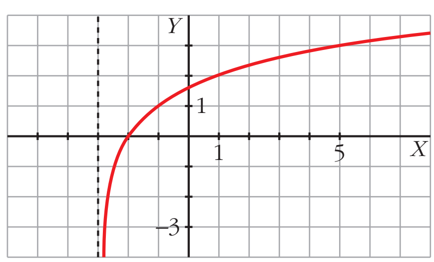
Hallamos algunos puntos

x	–2	–1	1	5
y	0	1	2	3

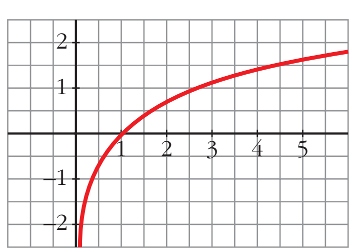
y vemos que:

$$\lim_{x \to -3^+} log_2\,(x + 3) = -\infty$$

Su gráfica es:



3 **Esta es la gráfica de la función $f(x) = ln\ x$.**

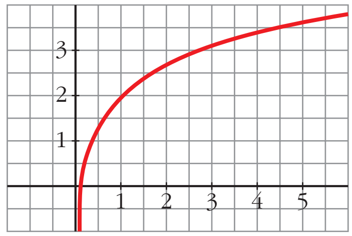


A partir de ella, representa:

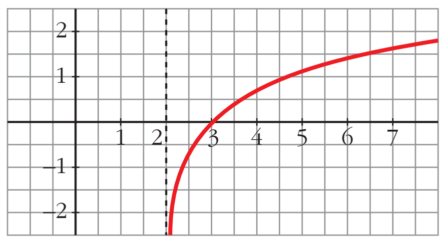
a) $y = f(x) + 2$ **b)** $y = f(x - 2)$ **c)** $y = -f(x)$

Resolución

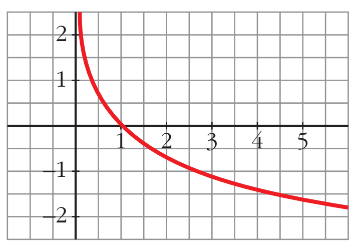
a) $y = f(x) + 2 \;\rightarrow\;$ Trasladamos $f(x)$ 2 unidades hacia arriba.



b) $y = f(x - 2) \;\rightarrow\;$ Trasladamos $f(x)$ 2 unidades hacia la derecha.



c) $y = -f(x) \;\rightarrow\;$ Es la simétrica de $f(x)$ respecto al eje OX.



4 **Si $y = f(x)$ pasa por el punto (2, –3), di un punto de:**

a) $y = f(x) + 4$

b) $y = f(x + 4)$

c) $y = 2f(x)$

d) $y = -f(x)$

Resolución

a) $(2, -3 + 4) = (2, 1)$

b) $(2 - 4, -3) = (-2, -3)$

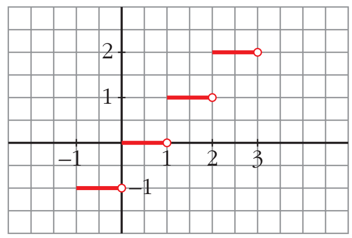
c) $(2, -3 \cdot 2) = (2, -6)$

d) $(2, 3)$

5 **Representa: $y = Ent(x)$, $x \in [-1, 3)$**

Resolución

$y = Ent(x)$, $x \in [-1, 3)$



6 **Una población de insectos crece según la función: $y = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x}$ (x = tiempo en días; y = número de insectos en miles).**

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en llegar a 10 000 insectos.

Resolución

a) $x = 0 \;\rightarrow\; y = 1 + 0{,}5 \cdot e^0 = 1{,}5 \;\rightarrow$ Población inicial: 1 500 insectos.

b) $y = 10 \;\rightarrow\; 10 = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x} \;\rightarrow\; \dfrac{9}{0{,}5} = e^{0{,}4x} \;\rightarrow\; 0{,}4x = ln\ 18 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{ln\ 18}{0{,}4} = 7{,}23$$

Tarda entre 7 y 8 días.

7 **A partir de las funciones: $f(x) = e^x$; $g(x) = sen\ x$; $h(x) = \sqrt{x}$, hemos obtenido, por composición, las funciones:**

$$p(x) = sen\sqrt{x};\quad q(x) = e^{sen\ x};\quad r(x) = \sqrt{e^x}$$

Explica el procedimiento seguido.

Resolución

$p(x) = sen\sqrt{x} \;\rightarrow\; p(x) = g[h(x)] \;\rightarrow\; p = g \circ h$

$q(x) = e^{sen\ x} \;\rightarrow\; q(x) = f[g(x)] \;\rightarrow\; q = f \circ g$

$r(x) = \sqrt{e^x} \;\rightarrow\; r(x) = h[f(x)] \;\rightarrow\; r = h \circ f$

8 **En la función:** $f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.

b) Después de hallar b, explica si f es continua en $x = 2$.

Resolución

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para que tenga límite en $x = 2$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - b = 6 - b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 \cdot 2 + 9 = 5 \end{array}\right\} \to 6 - b = 5 \to b = 1$$

b) Para que sea continua en $x = 2$, debe ser $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$f(2) = 3$$

Como $f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x)$, f no es continua en $x = 2$.

9 **Prueba, utilizando la definición, que la función derivada de $f(x) = \dfrac{3x - 5}{2}$ es $f'(x) = \dfrac{3}{2}$.**

Resolución

$$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = \frac{3x - 5}{2}$$

$$f(x + h) = \frac{3(x + h) - 5}{2}$$

$$f(x + h) - f(x) = \frac{3x + 3h - 5 - 3x + 5}{2} = \frac{3h}{2}$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{3h}{2} : h = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

10 **Halla la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$, que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.**

Resolución

Pendiente de $x + y + 3 = 0$: $m = -1$

El valor de la derivada en el punto de tangencia debe ser igual a –1.

$f(x) = -x^2 + 5x$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2x + 5 \;\rightarrow\; -2x + 5 = -1 \;\rightarrow\; x = 3 \\ f(3) = -3^2 + 5 \cdot 3 = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Punto de tangencia: } P(3, 6)$$

Ecuación de la recta tangente buscada: $y = 6 - 1(x - 3) \;\rightarrow\; y = 9 - x$

11 **Halla los puntos singulares de $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.**

Resolución

$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5 \;\rightarrow\; f'(x) = -4x^3 + 16x \;\rightarrow\; f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x^3 + 16x = 0 \;\rightarrow$

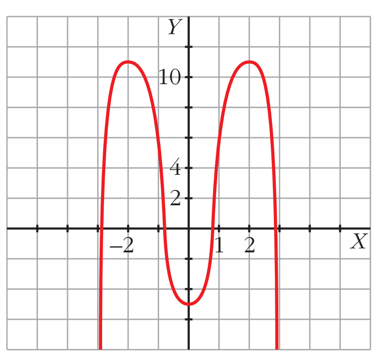
$$\rightarrow\; 4x(-x^2 + 4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 & \rightarrow\; f(0) = -5 \\ x = 2 & \rightarrow\; f(2) = -16 + 32 - 5 = 11 \\ x = -2 & \rightarrow\; f(-2) = -16 + 32 - 5 = 11 \end{cases}$$

Los puntos singulares son $(0, -5)$, $(2, 11)$ y $(-2, 11)$.

$$\text{Ramas infinitas: } \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \end{cases}$$

Máximos: $(2, 11)$ y $(-2, 11)$

Mínimo: $(0, -5)$



12 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{tg\, x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{ln\, x}{x}$

c) $f(x) = arc\ tg\ x^2$ **d)** $f(x) = e^{\pi}$

e) $f(x) = \dfrac{arc\ sen\ x}{2}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

Resolución

a) $f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2\sqrt{tg\, x}}$

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot x - ln\, x}{x^2} = \dfrac{1 - ln\, x}{x^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

d) $f'(x) = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

f) $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

13 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:**

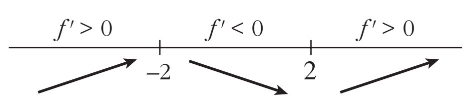
a) $y = x^3 - 12x$

b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

Resolución

a) $f(x) = x^3 - 12x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12;\ \ 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de f' para saber dónde crece y dónde decrece la función:



f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. f decrece en $(-2, 2)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - x^2 + 4}{x^2} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 + 4}{x^2} = 0$ No tiene solución.

f' es positiva para cualquier valor de x. f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

14 **En la función $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ estudia:**

a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Los máximos y los mínimos relativos.

c) Representa su gráfica.

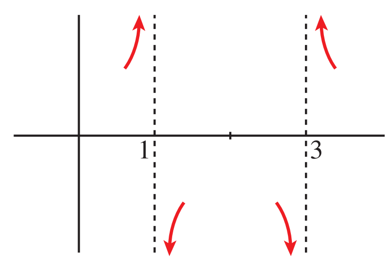
Resolución

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

a) • Asíntotas verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, \ x = 3$

Posición de $x = 1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \end{cases}$

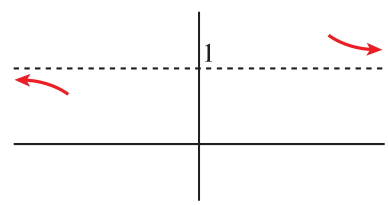
Posición de $x = 3$ $\begin{cases} x \to 3^- & f(x) \to -\infty \\ x \to 3^+ & f(x) \to +\infty \end{cases}$



• Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \rightarrow y = 1$$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty & f(x) > 1 \\ x \to -\infty & f(x) < 1 \end{cases}$



b) Máximos y mínimos:

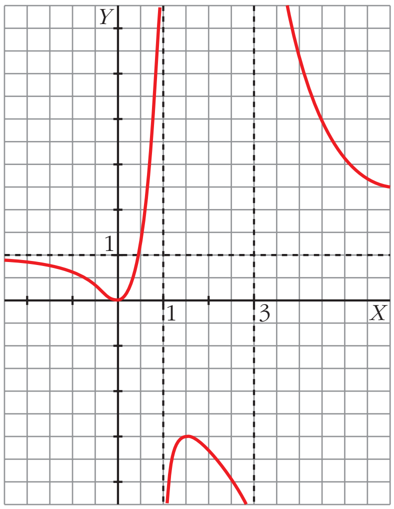
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 6x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow \\ x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \end{array} \right.$$

$\rightarrow f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$ es mínimo relativo.

$\rightarrow f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -3 \rightarrow Q\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$ es máximo relativo.

c)



15 **¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?**

a) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x - 1}$ **b)** $y = 1 + \dfrac{3}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x}$

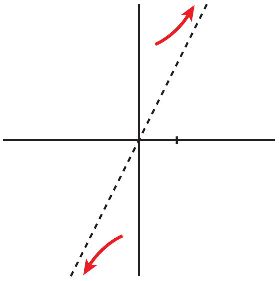
Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

Resolución

Tiene asíntota oblicua $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x} = \dfrac{4}{x} + 2x$.

La asíntota es $y = 2x$.

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \end{cases}$



16 **Calcula a y b de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en (2, 1).**

Resolución

Si $y = x^3 + ax + b$ tiene un punto singular en (2, 1), la curva pasa por ese punto y su derivada es igual a 0 en él.

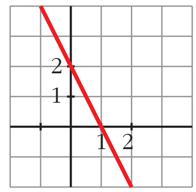
$(2, 1) \in (x, f(x)) \to 1 = 2^3 + a \cdot 2 + b \to 2a + b = -7$

$f'(x) = 0$ en $x = 2 \to f'(x) = 3x^2 + a \to 0 = 3 \cdot 2^2 + a \to 12 + a = 0$

$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ 12 + a = 0 \end{cases} \to a = -12, \; b = 17$

La función es $y = x^3 - 12x + 17$.

17 **Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.**



a) Di para qué valores de x es f creciente y para cuáles f es decreciente.

b) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal? Justifícalo.

Resolución

a) f es creciente cuando $f' > 0$ $\rightarrow$ f crece si $x < 1$ y decrece si $x > 1$.

b) Tiene un punto de tangente horizontal en $x = 1$, porque en ese punto $f' = 0$.