BLOQUE III GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

Página 240

1 **Dados los vectores $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\vec{v}(0, -2)$, calcula:**

a) $|\vec{u}|$ **b)** $-2\vec{u} + 3\vec{v}$ **c)** $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v})$

Resolución

$\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ $\vec{v}(0, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $-2\vec{u} + 3\vec{v} = -2\left(\frac{1}{2}, -1\right) + 3(0, -2) = (-1, 2) + (0, -6) = (-1, -4)$

c) $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = 2 \cdot (-2) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -4\left(\frac{1}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)\right) = -8$

2 **Determina el valor de k para que los vectores $\vec{a}(1, 3)$ y $\vec{b}(6, k)$ sean ortogonales.**

Resolución

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3) \cdot (6, k) = 6 + 3k = 0 \to k = -2$

3 **Dados los vectores $\vec{u}(-1, 0)$ y $\vec{v}(1, 2)$:**

a) Expresa el vector $\vec{w}(4, 6)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcula *proy*$_{\vec{u}}\,\vec{v}$.

c) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución

a) $\vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v} \to (4, 6) = k(-1, 0) + s(1, 2) = (-k + s, 2s) \to$

$$\to \left.\begin{aligned} -k + s &= 4 \\ 2s &= 6 \end{aligned}\right\} \; s = 3, \; k = -1$$

$\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $proy_{\vec{u}}\, \vec{v} = |\vec{v}|\ cos\ \alpha = \dfrac{|\vec{v}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-1}{1} = -1$

c) $cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \dfrac{-1}{1 \cdot \sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116°\ 33'\ 54''$

4 **Determina el valor de y para que los puntos $A(0, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(3, y)$ estén alineados.**

Resolución

Para que A, B y C estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ deben tener la misma dirección, es decir, deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\,(-1, 3) \\ \overrightarrow{BC}\,(4, y-4) \end{array}\right\} \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{4}{-1} \rightarrow 4 - y = 12 \rightarrow y = -8$$

5 **Halla en forma paramétrica e implícita la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 3)$ y es perpendicular a la recta s: $\dfrac{x+1}{2} = 1 - y$.**

Resolución

s: $\dfrac{x+1}{2} = 1 - y \rightarrow \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1}$. Vector dirección de s: $\vec{v}(2, -1)$

Un vector perpendicular a $\vec{v}$ es $\vec{u}(1, 2)$.

Buscamos una recta r que pasa por $P(0, 3)$ y tiene como vector dirección a $\vec{u}(1, 2)$:

— Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t + 3 \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ t = \dfrac{y-3}{2} \end{array}\right\} x = \dfrac{y-3}{2} \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow 2x - y + 3 = 0$$

— Ecuación implícita: $2x - y + 3 = 0$

6 **Se consideran las rectas r: $2x + y - 1 = 0$ y s: $kx - y + 5 = 0$. Determina k en cada uno de los siguientes casos:**

a) r y s son paralelas.

b) r y s se cortan en el punto $P(2, -3)$.

Resolución

a) r: $2x + y - 1 = 0$

s: $kx - y + 5 = 0$

r y s son paralelas si sus vectores de dirección, $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(k, -1)$, lo son:

$\vec{v} = t\vec{u} \rightarrow (k, -1) = t(2, 1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} k = 2t \\ -1 = t \end{array}\right\} \; t = -1, \; k = -2$

b) Comprobamos que $P(2, -3)$ es un punto de $r \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0$

Buscamos ahora el valor de k para el que P también pertenece a s:

$k \cdot 2 - (-3) + 5 = 0 \rightarrow 2k + 8 = 0 \rightarrow k = -4$

7 **Obtén la expresión analítica del haz de rectas al que pertenecen r: $2x + y - 3 = 0$ y s: $x + y - 2 = 0$. Halla la recta de ese haz que pasa por $P(2, 3)$.**

Resolución

Expresión analítica del haz: $k(2x + y - 3) + t(x + y - 2) = 0$

Como la recta que buscamos ha de pasar por el punto (2, 3),

$$k(2 \cdot 2 + 3 - 3) + t(2 + 3 - 2) = 0 \rightarrow 4k + 3t = 0$$

Cualquier par de valores de k y t que cumplan la igualdad anterior dan lugar a la misma recta.

Tomamos, por ejemplo, $k = 3$ y $t = -4$. Así:

$$3(2x + y - 3) - 4(x + y - 2) = 0 \rightarrow 6x + 3y - 9 - 4x - 4y + 8 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 2x - y - 1 = 0$ es la recta del haz que pasa por el punto (2, 3).

8 **Solo una de las siguientes ecuaciones corresponde a una circunferencia. Señala cuál y determina su centro y su radio:**

$\boldsymbol{C_1: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0}$

$\boldsymbol{C_2: x^2 + y^2 - 2xy + 6y + 6 = 0}$

$\boldsymbol{C_3: x^2 + y^2 - 3x + 5x + 18 = 0}$

Resolución

La ecuación de una circunferencia es de la forma:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ con } \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0$$

Su centro es $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ y su radio es $r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$

- C_2 no es una circunferencia, pues tiene un término en xy.
- C_3 no es una circunferencia, ya que:

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 18 = \frac{34}{4} - 18 < 0$$

• C_1 sí es una circunferencia.

Su centro es $\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{6}{2}\right) = (1, -3)$.

Su radio es $r = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 6} = \sqrt{4} = 2$.

9 **Escribe la ecuación de una elipse de centro (0, 0) y focos en el eje de abscisas, sabiendo que su excentricidad es igual a 4/5 y que uno de sus focos es *F*(8, 0).**

Resolución

La ecuación debe ser de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = b^2 + c^2$ • $F(8, 0) = (c, 0) \rightarrow c = 8$

$exc = \frac{4}{5} = \frac{c}{a}$ • $exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{8}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow a = 10$

$F(8, 0) = (c, 0)$ • $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$

Por tanto, la ecuación buscada es: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

10 **Sin resolver el sistema formado por sus ecuaciones, estudia la posición relativa de la circunferencia C: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la recta r: $3x - 4y - 1 = 0$.**

Resolución

Calculamos la distancia de la recta al centro de la circunferencia, $C(1, -2)$:

$$dist(r, C) = \frac{3 \cdot 1 - 4(-2) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Esta distancia coincide con el radio de la circunferencia. Por tanto, son tangentes.

11 **Determina las coordenadas de un vector unitario $\vec{a}(x, y)$ sabiendo que forma un ángulo de 60° con el vector $\vec{u}(2, 0)$.**

Resolución

$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 60° \rightarrow 2x = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$|\vec{a}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Existen, por tanto, dos soluciones: $\vec{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\vec{a}'\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

12 **Sean $\vec{a}(-5, 5)$ y $\vec{b}(-1, 3)$. Expresa $\vec{a}$ como suma de dos vectores, uno con la misma dirección que $\vec{b}$ y otro perpendicular a $\vec{b}$.**

Resolución

Los vectores paralelos a $\vec{b}$ son de la forma $k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

Los vectores perpendiculares a $\vec{b}$ son de la forma $s(3, 1)$, $s \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} = (-5, 5) = k(-1, 3) + s(3, 1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -k + 3s = -5 \\ 3k + \ \ s = 5 \end{array}\right\} \ s = -1, \ k = 2$$

Por tanto, $\vec{a} = (-2, 6) + (-3, -1)$

13 **Halla el simétrico del punto $A(0, 0)$ respecto a la recta r: $x + y - 2 = 0$.**

Resolución

- Buscamos la ecuación de la recta s que pasa por A y es perpendicular a r:

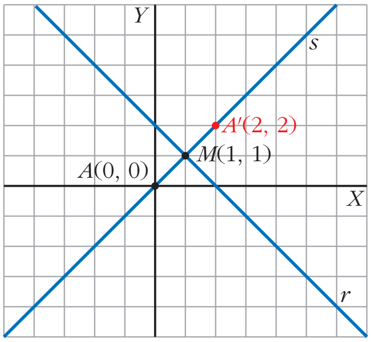
  s: $x - y = 0$

- Punto de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - y \quad\ \ = 0 \end{array}\right\} \ 2x = 2 \ \rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\} \ M(1, 1)$$

- El punto $A'(x, y)$ que buscamos es el simétrico de A respecto a M:

$$\left(\frac{x + 0}{2}, \frac{y + 0}{2}\right) = (1, 1) \ \rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right\} \ A'(2, 2)$$



14 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2}$ y forma un ángulo de 45° con la recta r.**

Resolución

Hallamos el punto de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{-2} \end{array}\right\}$$ Resolviendo el sistema obtenemos el punto $P(1, 3)$.

La pendiente de r es 2.

$$1 = tg\ 45° = \left|\frac{2-m}{1+2m}\right| \begin{cases} 2 - m = 1 + 2m \ \rightarrow \ m = \dfrac{1}{3} \\ 2 - m = -1 - 2m \ \rightarrow \ m = -3 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$t: y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1)$

$t': y - 3 = -3(x - 1)$

15 **Halla los puntos de la recta $y = 0$ que distan 3 unidades de la recta $3x - 4y = 0$.**

Resolución

Los puntos de la recta $y = 0$ son de la forma $P(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$r: 3x - 4y = 0$

$$dist(P, r) = \frac{|3x - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x|}{5} = 3$$

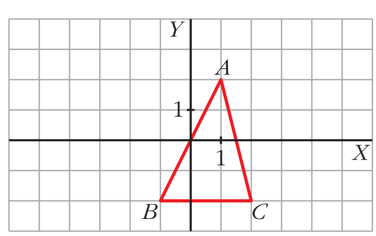
$$|3x| = 15 \begin{cases} 3x = 15 \ \rightarrow \ x = 5 \\ 3x = -15 \ \rightarrow \ x = -5 \end{cases}$$

Hay dos puntos que cumplen la condición pedida: $P(5, 0)$ y $P'(-5, 0)$.

16 **En el triángulo ABC de la figura, calcula:**

a) El ortocentro.

b) El área del triángulo.



Resolución

a) Ortocentro: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$, donde h_A, h_B y h_C son las alturas del triángulo desde A, B y C, respectivamente.

$A(1, 2)$ $\quad B(-1, -2)$ $\quad C(2, -2)$

Calculamos las ecuaciones de dos de las alturas:

$$h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, 0) \rightarrow \vec{a} = (0, 3) \\ A(1, 2) \in h_A \end{cases} \rightarrow h_A: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases} \rightarrow h_A: x = 1$$

$$h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (1, -4) \rightarrow \vec{b} = (4, 1) \\ B(-1, -2) \in h_B \end{cases} \rightarrow h_B: \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \dfrac{x+1}{4} \\ t = y + 2 \end{array} \right\} \dfrac{x+1}{4} = y + 2 \rightarrow x + 1 = 4y + 8 \rightarrow x - 4y - 7 = 0$$

$h_B: x - 4y - 7 = 0$

Calculamos ahora $h_A \cap h_B$:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x - 4y - 7 = 0 \end{array} \right\} 1 - 4y - 7 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

$$R = h_A \cap h_B = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

b) Área del triángulo $ABC = \dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AM}|}{2}$, donde $M = h_A \cap r_{BC}$ y r_{BC} es la recta que contiene al lado BC.

$$\left. \begin{array}{l} h_A: x = 1 \\ r_{BC}: y = -2 \end{array} \right\} h_A \cap r_{BC} = (1, -2) = M$$

$\overrightarrow{BC} = (3, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3$

$\overrightarrow{AM} = (0, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AM}| = 4$

Área del triángulo $ABC = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ u}^2$

17 Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:

a) $2y^2 - 12x = 0$

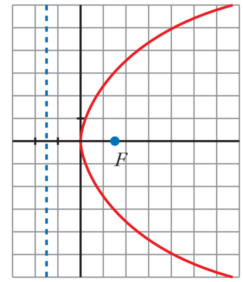
b) $4x^2 + 4y^2 = 16$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

Resolución

a) $2y^2 - 12x = 0 \;\rightarrow\; y^2 = 6x$

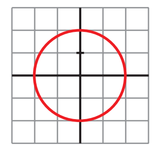


Es una parábola.

Foco $\rightarrow$ $F\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$; Recta directriz $\rightarrow$ r: $x = -\dfrac{3}{2}$

Vértice $\rightarrow$ $(0, 0)$

b) $4x^2 + 4y^2 = 16 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = 4$



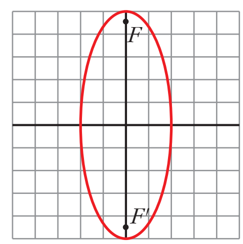
Es una circunferencia.

Centro $\rightarrow$ $(0, 0)$

Radio $\rightarrow$ $r = 2$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

Es una elipse con los focos en el eje Y.



$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$a = 5;\quad b = 2;\quad c = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

Constante: $k = 2a = 10$

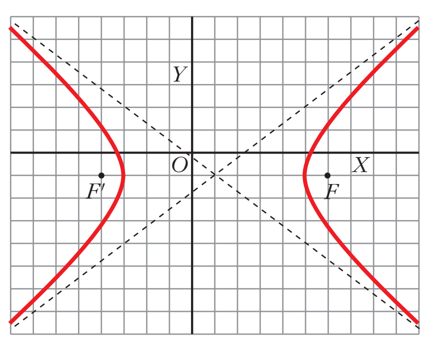
Focos: $F\left(0, \sqrt{21}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{21}\right)$

Semieje mayor: 5

Semieje menor: 2

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}92$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$



Es una hipérbola.

Centro: $(1, -1)$

Semiejes: $a = 4,\; b = 3$

$c^2 = 4^2 + 3^2 \;\rightarrow\; c = 5$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Asíntotas: $\begin{cases} r\text{: } y = \dfrac{3}{4}(x-1) - 1 \\[2mm] r'\text{: } y = -\dfrac{3}{4}(x-1) - 1 \end{cases}$

Focos: $F(6, -1)$, $F'(-4, -1)$

18 **Halla la ecuación de la parábola de vértice $V(-1, -1)$ y directriz r: $x = -3$.**

Resolución

Puesto que el vértice tiene que equidistar del foco y de la directriz, ha de ser $F(1, -1)$.

Los puntos $P(x, y)$ de la parábola han de cumplir:

$dist(P, F) = dist(P, d)$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |x+3|$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$(y+1)^2 + x^2 + 1 - 2x = x^2 + 6x + 9 \rightarrow (y+1)^2 = 8x + 8 \rightarrow (y+1)^2 = 8(x+1)$

La ecuación de la parábola es $(y+1)^2 = 8(x+1)$.

19 **Dado un segmento AB de longitud 4, halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican:**

$$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$$

☛ ***Toma como eje X la recta que contiene al segmento, y como eje Y la mediatriz de AB.***

Resolución

Tomamos como eje X la recta que contiene al segmento AB, y como eje Y, la mediatriz de AB.

En este caso, será $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico del plano que verifica:

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$

$2\left(\sqrt{(x+2)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 = 18$

$2(x^2 + 4x + 4 + y^2) + (x^2 - 4x + 4 + y^2) = 18$

$2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 18$

$3x^2 + 3y^2 + 4x + 12 = 18$

La ecuación pedida es $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6 = 0$.