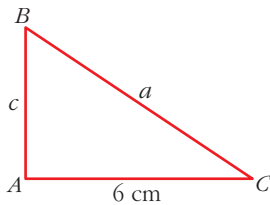


BLOQUE II TRIGONOMETRÍA Y NÚMEROS COMPLEJOS

Página 166

- 1 En el triángulo ABC , rectángulo en A , conocemos $\operatorname{tg} \hat{B} = 1,5$ y $b = 6$ cm. Halla los lados y los ángulos del triángulo.

Resolución



$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow 1,5 = \frac{6}{c} \rightarrow c = 4 \text{ cm}$$

$$a = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ cm}$$

$$\hat{B} = \operatorname{arctg}(1,5) \rightarrow \hat{B} = 56^\circ 18' 36''$$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 33^\circ 41' 24''$$

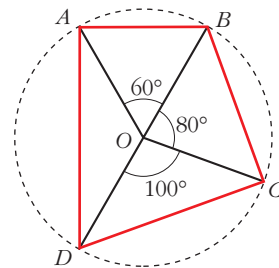
- 2 Halla el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio.

• Ten en cuenta que los triángulos AOB , BOC , COD y DOA son isósceles.

Resolución

Como el radio es 6 cm, los lados iguales a cada uno de esos triángulos isósceles miden 6 cm.

Así, para cada triángulo, conocidos dos lados y el ángulo comprendido, podemos hallar el tercer lado con el teorema del coseno.



- En \widehat{AOB} : $\overline{AB}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 36 \rightarrow \overline{AB} = 6 \text{ cm}$

(Como era de esperar por ser un triángulo equilátero).

- En \widehat{BOC} : $\overline{BC}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 80^\circ = 59,5 \rightarrow \overline{BC} = 7,7 \text{ cm}$

- En \widehat{COD} : $\overline{CD}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 100^\circ = 84,5 \rightarrow \overline{CD} = 9,2 \text{ cm}$

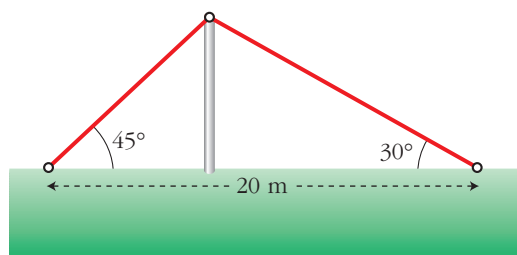
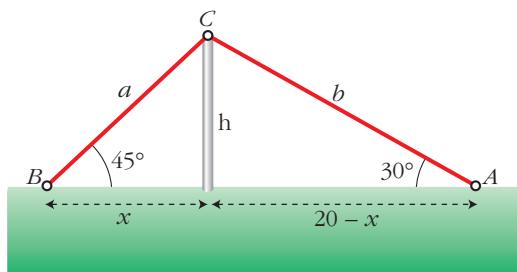
- En \widehat{DOA} : $\overline{DA}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 108 \rightarrow \overline{DA} = 10,4 \text{ cm}$

- Por tanto, $\text{Perímetro} = 6 + 7,7 + 9,2 + 10,4 = 33,3 \text{ cm}$

- 3 Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura.**

¿Cuánto miden el mástil y el cable?

Resolución



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{h}{1} = h \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{h}{20-x} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{20-h} \rightarrow (20-h) \operatorname{tg} 30^\circ = h \rightarrow 20 \operatorname{tg} 30^\circ - h \operatorname{tg} 30^\circ = h \rightarrow$$

$$\rightarrow 20 \operatorname{tg} 30^\circ = h + h \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow h = \frac{20 \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ} = 7,32 \text{ m (mástil)}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} 45^\circ &= \frac{h}{a} \rightarrow a = \frac{h}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{7,32}{\operatorname{sen} 45^\circ} = 10,35 \text{ m} \\ \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{h}{b} \rightarrow b = \frac{h}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{7,32}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 14,64 \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow a + b = 24,99 \text{ m (cable)}$$

- 4 Justifica si existe algún ángulo α tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$.**

Resolución

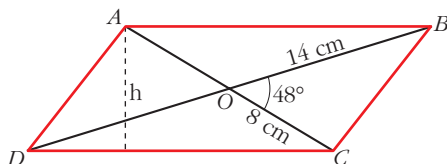
$$\text{Si } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \text{ y } \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1/2}{\operatorname{cos} \alpha} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{Pero } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \neq 1.$$

Por tanto, no existe ningún ángulo que verifique las dos condiciones a la vez.

- 5** Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48° . Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.

Resolución



Utilizamos el teorema del coseno en los triángulos BOC y AOB .

$$\overline{BC}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \cos 48^\circ \rightarrow \overline{BC} = 10,49 \text{ cm}$$

$$\overline{AB}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \cos (180^\circ - 48^\circ) \rightarrow \overline{AB} = 20,25 \text{ cm}$$

Perímetro: $(10,49 + 20,25) \cdot 2 = 61,48 \text{ cm}$

Para hallar el área, necesitamos conocer un ángulo del paralelogramo.

Hallamos el ángulo \widehat{A} del triángulo AOB .

$$\frac{14}{\sin \widehat{BAO}} = \frac{20,25}{\sin 132^\circ} \rightarrow \sin \widehat{BAO} = \frac{14 \cdot \sin 132^\circ}{20,25} \rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ 54' 57''$$

En el triángulo ACD , hallamos la altura.

$$\widehat{BAO} = \widehat{ACD} \rightarrow \sin 30^\circ 54' 57'' = \frac{h}{16} \rightarrow h = 8,22 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{20,25 \cdot 8,22}{2} = 83,23 \text{ cm}^2$$

- 6** Busca, en cada caso, un ángulo del primer cuadrante que tenga una razón trigonométrica igual que el ángulo dado y di cuál es esa razón.

a) 297°

b) 1252°

c) -100°

d) $\frac{13\pi}{5}$

Resolución

a) $297^\circ = 360^\circ - 63^\circ \rightarrow \cos 297^\circ = \cos 63^\circ$

b) $1252^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 172^\circ \rightarrow 172^\circ = 180^\circ - 8^\circ$

$\sin 1252^\circ = \sin 8^\circ$

c) $-100^\circ \rightarrow -100^\circ + 360^\circ = 260^\circ \rightarrow 260^\circ = 180^\circ + 80^\circ$

$\text{tg} (-100^\circ) = \text{tg} 80^\circ$

d) $\frac{13\pi}{5} = 2\pi + \frac{3\pi}{5} \rightarrow \frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$

$\sin \frac{13\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5}$

7 Si $\operatorname{tg} \alpha = 2$ y $\cos \alpha > 0$, halla:

a) $\cos 2\alpha$ b) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ c) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ d) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$

Resolución

$\operatorname{tg} \alpha = 2$ y $\cos \alpha > 0$, α está en el primer cuadrante.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{5}/5} = 2 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{a) } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{5}/5}{2}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

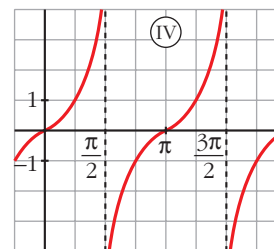
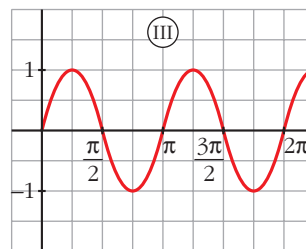
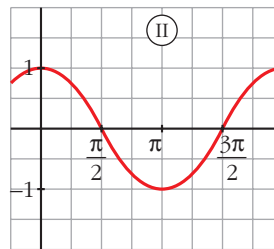
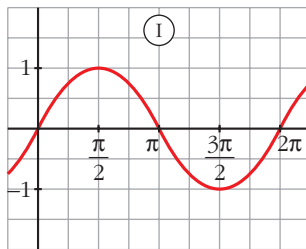
8 Asocia a cada grafica una de estas fórmulas:

a) $y = \operatorname{tg} x$

b) $y = \operatorname{sen} 2x$

c) $y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$

d) $y = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$



Resolución

a) \rightarrow IV

b) \rightarrow III

c) \rightarrow I

d) \rightarrow II

9 Demuestra que:

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = 2 \cos^2 x - 1$$

Resolución

$$\begin{aligned} \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x &= (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

10 Resuelve:

a) $2\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

$$\text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \cos \frac{3x - y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Resolución

a) $2\operatorname{sen} x + \cos x = 1 \rightarrow (2\operatorname{sen} x)^2 = (1 - \cos x)^2 \rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x - 2\cos x \rightarrow$

$$\rightarrow 5\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 \rightarrow x_1 = 0^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbf{Z} \rightarrow \text{Vale}$$

$$\cos x = -\frac{3}{5} \begin{cases} x_2 = 126^\circ 52' 12'' + 360^\circ k, \quad k \in \mathbf{Z} \rightarrow \text{Vale} \\ x_3 = 233^\circ 7' 48'' \rightarrow \text{No vale} \end{cases}$$

Hemos comprobado las soluciones en la ecuación dada.

$$\text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \cos \frac{3x - y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Comenzamos trabajando con la primera ecuación:

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \rightarrow 2\operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} \cos \frac{3x - y}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow 2\operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3x + y}{2} = 60^\circ \quad [1]$$

Ahora, con la segunda:

$$\cos \frac{3x - y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{3x - y}{2} = 30^\circ \quad [2]$$

Con [1] y [2], obtenemos, en el 1.^{er} cuadrante: $x = 30^\circ$

Otras posibles soluciones son:

$$x = 50^\circ, y = 90^\circ$$

$$x = 130^\circ, y = -270^\circ$$

$$x = 150^\circ, y = -210^\circ$$

- 11** Dado el número complejo $z = 3_{60^\circ}$, expresa en forma polar el conjugado, el opuesto y el inverso.

Resolución

$$\bar{z} = 3_{360^\circ - 60^\circ} = 3_{300^\circ}$$

$$-z = 3_{60^\circ + 180^\circ} = 3_{240^\circ}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0^\circ}}{3_{60^\circ}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-60^\circ} = \left(\frac{1}{3}\right)_{300^\circ}$$

- 12** Simplifica: $\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$

Resolución

$$i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = -1; \quad i^7 = i^4 \cdot i^2 \cdot i = -i$$

$$i^{33} = (i^4)^8 \cdot i = i$$

$$\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}} = \frac{-1 - 2(-i)}{2 + i} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = \frac{(-1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-2 + i + 4i - 2i^2}{(2)^2 - (i)^2} = \frac{5i}{5} = i$$

- 13** Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $-1 + \sqrt{3}i$ y $-1 - \sqrt{3}i$.

Resolución

$$[x - (-1 + \sqrt{3}i)][x - (-1 - \sqrt{3}i)] = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$$

- 14** Encuentra dos números complejos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea 40.

Resolución

$$\begin{cases} z + w = 10 & \rightarrow w = 10 - z \\ z \cdot w = 40 & \rightarrow z(10 - z) = 40 \rightarrow z^2 - 10z + 40 = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{15}i}{2} \begin{cases} z_1 = 5 + \sqrt{15}i \\ z_2 = 5 - \sqrt{15}i \end{cases}$$

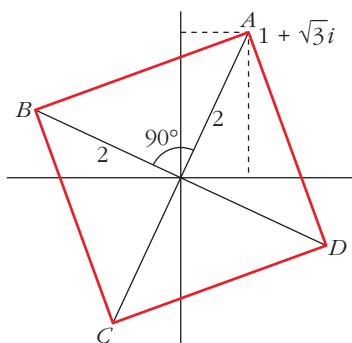
$$\text{Si } z_1 = 5 + \sqrt{15}i \rightarrow w_1 = 10 - 5 - \sqrt{15}i = 5 - \sqrt{15}i$$

$$\text{Si } z_2 = 5 - \sqrt{15}i \rightarrow w_2 = 10 - 5 + \sqrt{15}i = 5 + \sqrt{15}i$$

Los números son $5 + \sqrt{15}i$ y $5 - \sqrt{15}i$.

- 15** Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.

Resolución



Hacemos giros de 90° . Para ello, multiplicamos por 1_{90° :

$$A = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ} \quad B = 2_{60^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 2_{150^\circ}$$

$$C = 2_{150^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 2_{240^\circ} \quad D = 2_{240^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 2_{330^\circ}$$

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2} \text{ u.}$$