II

BLOQUE II
ANÁLISIS

Página 234

1 **a) Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$.**

b) Representa la función para ese valor de k.

c) ¿Es derivable en $x = 1$?

Resolución

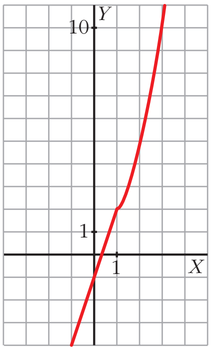
a) Para que f sea continua en $x = 1$, ha de ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k \end{cases} \Bigg\} \; 2 = 1 + k \;\to\; k = 1$$

$f(1) = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Para valores $x \le 1$, la gráfica es una recta; para $x > 1$, la gráfica es un trozo de parábola.



c) $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 2 \end{array}\right\}$ No es derivable en $x = 1$ porque $f'(1^-) \ne f'(1^+)$.

2 **Estudia las asíntotas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ y represéntala gráficamente.**

Resolución

- Asíntotas verticales:

$$1 - x^2 = 0 \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; \text{Posición:} \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{1 - x^2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{1 - x^2} = -\infty \end{cases} \\ x = -1 \;\rightarrow\; \text{Posición:} \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{1 - x^2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{1 - x^2} = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

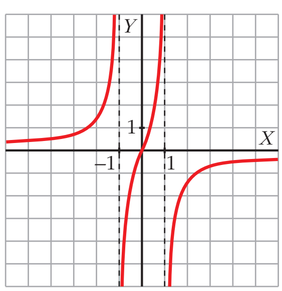
$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = 0 \;\rightarrow\; y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\text{Posición} \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty, \; f(x) < 0 \\ \text{Si } x \to -\infty, \; f(x) > 0 \end{cases}$$

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$y' = \dfrac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2} \;\rightarrow\; y' > 0$ para cualquier valor de x.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene máximos ni mínimos.



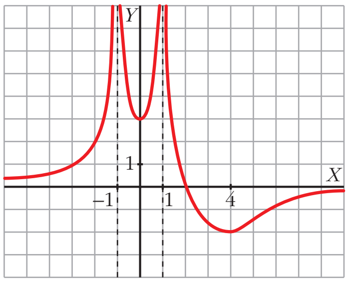
3 **La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:**

- **Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Es continua en todo su dominio y corta el eje OX en $x = 2$.**
- **Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.**
- **Tiene una asíntota vertical en $x = 1$ con $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$**

- **Tiene una asíntota vertical en $x = -1$ con $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$**
- **Tiene un mínimo en (4, –2) y otro en (0, 3).**

Representa gráficamente la función.

Resolución



4 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2\sqrt{1-3x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.**

Resolución

- Punto de tangencia: $x = -1$; $f(-1) = (-1)^2\sqrt{1-3(-1)} = 2$
- Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = 2x\sqrt{1-3x} + x^2\dfrac{(-3)}{2\sqrt{1-3x}}$

$$f'(x) = \frac{4x(1-3x) - 3x^2}{2\sqrt{1-3x}} = \frac{4x - 15x^2}{2\sqrt{1-3x}}$$

$$m = f'(-1) = \frac{-4-15}{4} = -\frac{19}{4}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = 2 - \frac{19}{4}(x+1)$$

5 **Calcula a, b y c de modo que la función $f(x) = ax^3 - x^2 + bx + c$ pase por el punto (0, 5), tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.**

Resolución

$f(x) = ax^3 - x^2 + bx + c \;\to\; f'(x) = 3ax^2 - 2x + b$

- Pasa por (0, 5) $\to f(0) = 5 \to c = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Máximo en } x = -1 \to f'(-1) = 0 \to 3a + 2 + b = 0 \\ \bullet\ \text{Mínimo en } x = 3 \to f'(3) = 0 \to 27a - 6 + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3a + b = -2 \\ 27a + b = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3 \end{array}\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$$

6 **Halla el dominio de definición, los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de la función:**

$$y = x + \sqrt{1 - x}$$

Resolución

- Dominio: $1 - x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 1 \;\rightarrow\; Dom = (-\infty, 1]$
- Para hallar los máximos y los mínimos, calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{1-x} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 1 - x = \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4};\; f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

Comprobamos con la segunda derivada si el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ es máximo o mínimo:

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2} = \frac{-1}{4\sqrt{(1-x)^3}}$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4(1/2)^3} < 0 \;\rightarrow\; \text{Hay un máximo en } \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

- Para hallar los puntos de inflexión, igualamos a cero la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(1-x)^3}} = 0 \;\rightarrow\; \text{No tiene solución.}$$

No tiene puntos de inflexión.

7 **La recta de pendiente 3 que pasa por el punto (0, –2) es tangente a la curva $y = x^3$. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.**

Resolución

- Hallamos los puntos en los que la derivada es igual a 3:

$$f'(x) = 3x^2 \;\rightarrow\; 3x^2 = 3 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = 1 \\ x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = -1 \end{cases}$$

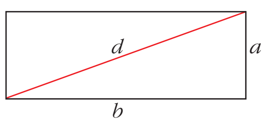
- Veamos cuál de los dos está en la recta dada:

$$\text{Ecuación de la recta } y = -2 + 3x \;\begin{cases} (1, 1) \;\rightarrow\; y = -2 + 3 = 1 \\ (-1, -1) \;\rightarrow\; y = -2 - 3 \neq -1 \end{cases}$$

Punto de tangencia: (1, 1).

8 **De todos los rectángulos de perímetro 10 m, halla las dimensiones del que tiene la diagonal mínima.**

Resolución



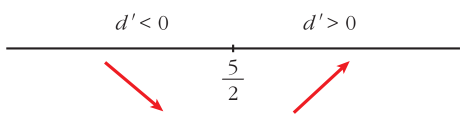
$2a + 2b = 10 \;\rightarrow\; a + b = 5 \;\rightarrow\; b = 5 - a$

$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (5 - a)^2} = \sqrt{2a^2 - 10a + 25}$

Para hallar el mínimo de d, igualamos a cero su derivada:

$$d' = \frac{4a - 10}{2\sqrt{2a^2 - 10a + 25}} = \frac{2a - 5}{\sqrt{2a^2 - 10a + 25}} = 0 \;\rightarrow\; 2a - 5 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{5}{2};\;\; b = \frac{5}{2}$$

Estudiamos el signo de d':



Si $a = \frac{5}{2}$, la diagonal es mínima.

El rectángulo que tiene la diagonal mínima es el cuadrado de lado $a = \frac{5}{2}$ m.

9 **Durante los 60 minutos de duración de cierto programa de radio, su índice de audiencia viene dado por la función $I(t) = at^2 + bt + c$, $0 \le t \le 60$.**

Sabiendo que cuando se inicia el programa el índice de audiencia es 20 y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia de 36:

a) Determina a, b y c. Justifica la respuesta.

b) Representa la función obtenida.

Resolución

a) $I(t) = at^2 + bt + c$, $0 \le t \le 60 \;\rightarrow\; I'(t) = 2at + b$

Como $I(0) = 20 \;\rightarrow\; c = 20$

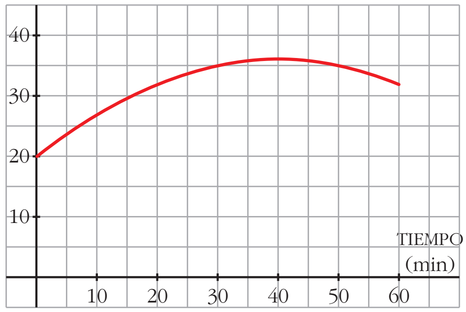
$I(40) = 36 \;\rightarrow\; a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 36$

$I'(40) = 0 \;\rightarrow\; 2 \cdot a \cdot 40 + b = 0$

$$\left.\begin{aligned} 1\,600a + 40b &= 16 \\ 80a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a = -\frac{1}{100},\;\; b = \frac{4}{5},\;\; c = 20$$

$$I(t) = -\frac{t^2}{100} + \frac{4}{5}t + 20$$

b) ÍNDICE DE AUDIENCIA



10 **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \le 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Halla a y b para que la función sea continua en el conjunto $\mathbb{R}$.

b) Representa la función para los valores $a = 0$ y $b = 3$.

c) Para $a = 0$ y $b = 3$, halla el área de la región plana limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Resolución

a) f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$ por estar definida mediante funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$.

- $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (-2x - a) = -a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1) = -1 \end{cases} \\ f(0) = -a \end{array}\right\}$$

Si $-a = -1 \rightarrow a = 1$, f es continua en $x = 0$.

- $x = 2$:

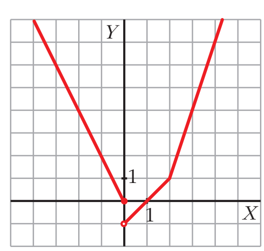
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (bx - 5) = 2b - 5 \end{cases} \\ f(2) = 1 \end{array}\right\}$$

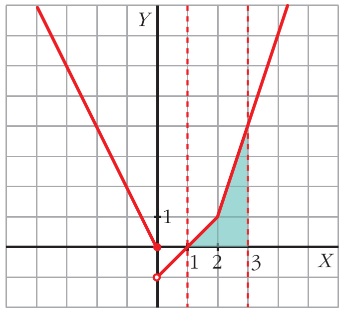
$2b - 5 = 1 \rightarrow b = 3$

Si $b = 3$, f es continua en $x = 2$.

Si $a = 1$ y $b = 3$, f es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f_2(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ 3x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



c) 

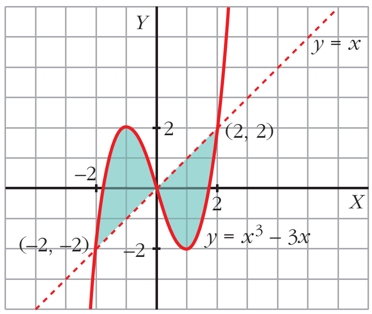
$$A = \int_1^2 (x-1)\,dx + \int_2^3 (3x-5)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x\right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3\ \text{u}^2$$

11 **Representa el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^3 - 3x$ e $y = x$. Después, calcula su área.**

Resolución



La gráfica de $y = x^3 - 3x$ corta a los ejes en los puntos: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$

Tiene un máximo en $(-1, 2)$ y un mínimo en $(1, -2)$.

Puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{array}\right\} \ x^3 - 3x = x \ \rightarrow \ x^3 - 4x = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x = 0, \ x = -2, \ x = 2$$

El recinto es simétrico.

$$\text{Área} = \int_{-2}^{0} (x^3 - 3x - x)\,dx + \int_0^2 [x - (x^3 - 3x)]\,dx = 2\int_0^2 (4x - x^3)\,dx =$$

$$= 2\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8\ \text{u}^2$$

12 **Calcula el área limitada por la función $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-3}$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.**

Resolución

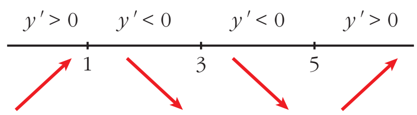
Representamos la función $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-3}$:

- Asíntota vertical: $x = 3$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{Si } x < 3, \ y \to -\infty \\ \text{Si } x > 3, \ y \to +\infty \end{array}\right.$

- Asíntota oblicua: $y = x + 1$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{Si } x \to +\infty, \ f(x) > x + 1 \\ \text{Si } x \to -\infty, \ f(x) < x + 1 \end{array}\right.$

- $y' = \dfrac{2(x-1)(x-3) - (x-1)^2}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0$ $\left\langle \begin{array}{l} x = 5, \ f(5) = 8 \\ x = 1, \ f(1) = 0 \end{array}\right.$

Signo de y':

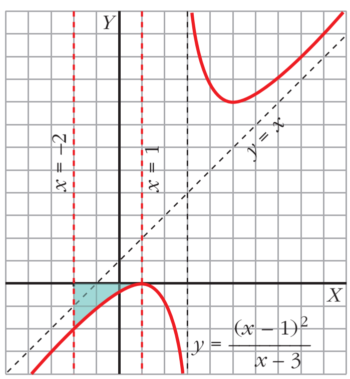


Máximo: (1, 0)

Mínimo: (5, 8)

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{1} \frac{(x-1)^2}{x-3}\, dx \right| = \left| \int_{-2}^{1} \left(x + 1 + \frac{4}{x-3} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} + x + 4\, ln\, |x-3| \right]_{-2}^{1} \right| = \left| \left(\frac{3}{2} + 4\, ln\, 2 \right) - 4\, ln\, 5 \right| \simeq 2{,}17 \text{ u}^2$$



13 **Escribe la expresión analítica de una función $f(x)$ de la que conocemos: $f''(x) = 3$; $f'(1) = 0$ y $f(1) = 5$.**

Resolución

$f''(x) = 3 \;\rightarrow\; f'(x) = \int 3\, dx = 3x + k;\;\; f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 3 + k = 0 \;\rightarrow\; k = -3$

$f'(x) = 3x - 3 \;\rightarrow\; f(x) = \int (3x-3)\, dx = \dfrac{3x^2}{2} - 3x + k'$

$f(1) = 5 \;\rightarrow\; \dfrac{3}{2} - 3 + k' = 5 \;\rightarrow\; k' = 8 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{2}$

$f(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 3x + \dfrac{13}{2}$

14 **Dada la función $f(x) = x + \dfrac{a}{x^3}$ donde a es una constante:**

a) Encuentra una primitiva de f.

b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?

c) Halla a sabiendo que $\int_1^2 f(x) = 1{,}5$.

Resolución

a) $F(x) = \int \left(x + \dfrac{a}{x^3}\right) dx = \dfrac{x^2}{2} + a \cdot \dfrac{x^{-2}}{-2} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a}{2x^2}$

b) $G(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a}{2x^2} + 2x \;\rightarrow\; G'(x) = x + \dfrac{a}{x^3} + 2$

G no es una primitiva de f porque $G'(x) \neq f(x)$.

c) $\int_1^2 f(x) = \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a}{2x^2}\right]_1^2 = 1{,}5 \;\rightarrow\; \dfrac{3}{2} + \dfrac{3a}{8} = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\; a = 0$