I BLOQUE I ÁLGEBRA

Página 122

1 **Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 2x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} y + z - 2x &= 0 \\ x + z - 2y &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}\right.$

Resolución

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 2x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$ Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 2.ª y 3.ª:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &3x = 5 \;\rightarrow\; x = 5/3 \\ &y = 2 - x \longrightarrow y = 1/3 \end{aligned}$$

Comprobamos si $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verifica la 1.ª ecuación:

$$\frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 5$$

El sistema no tiene solución. Representa tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{aligned} y + z - 2x &= 0 \\ x + z - 2y &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$ Ordenamos las incógnitas y las ecuaciones: $\left\{\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ -2x + y + z &= 0 \end{aligned}\right.$

Para resolverlo, aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 3y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x - 2y &= -z \\ y &= z \end{aligned}\right. \rightarrow \begin{aligned} &x = -\lambda + 2\lambda = \lambda \\ &y = \lambda \end{aligned}$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, \lambda)$

2 **Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado y halla su solución.**

$$\left\{\begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

Resolución

Si el sistema es *compatible determinado*, debe verificarse que $ran\,(M) = ran\,(M') = 3$, según el teorema de Rouché. Como M' es una matriz cuadrada de orden 4, su determinante debe ser igual a 0.

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ porque la 2.ª y 4.ª filas son iguales.

Podemos eliminar la última ecuación y resolverlo por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{3}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{2}{5}$$

Solución: $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

3 **Sean las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = (x \;\; m), \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

a) Si $(AB)(2C - D) = E$, plantea un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (x e y) en función de m.

b) ¿Para qué valores de m tiene el sistema solución? Resuélvelo.

Resolución

a) $(AB)\,(2C - D) = E$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x \;\; m) = \begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix}$$

$$2C - D = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)\,(2C - D) = E \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3m = -y + 2m + 2 \\ x + \;\; m = -2x - my + 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + \;\; y = 2 - m \\ 3x + my = 5 - m \end{array}\right\}$$

b) El sistema tendrá solución si $ran\,(M) = ran\,(M')$, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & m \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2-m \\ 3 & m & 5-m \end{pmatrix}$$

Buscamos los valores de m que hacen $|M| = 0$:

$3m - 3 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$

- Si $m \neq 1$, $ran\,(M) = ran\,(M') = 2 =$ *n.° de incógnitas.*

  El sistema es *compatible determinado*.

- Si $m = 1$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $ran\,(M) = 1$.

  $$M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \;\; ran\,(M') = 2$$

  El sistema es *incompatible*.

- Resolución:

  $$\left.\begin{array}{r} 3x + \;\; y = 2 - m \\ 3x + my = 5 - m \end{array}\right\} \text{ Restamos ambas ecuaciones:}$$

  $$y - my = 2 - m - 5 + m \;\rightarrow\; y(1 - m) = -3 \;\rightarrow\; y = \frac{-3}{1 - m}$$

  Sustituimos en la primera ecuación:

  $$3x - \frac{3}{1-m} = 2 - m \;\rightarrow\; 3x = 2 - m + \frac{3}{1-m} \;\rightarrow\; x = \frac{m^2 - 3m + 5}{3(1-m)}$$

4 **a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación y halla su valor:**

$$2A - AX = BX, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **calcula** $A^{12} + A^{-1}$.

Resolución

a) $2A - AX = BX \;\rightarrow\; 2A = BX + AX \;\rightarrow\; 2A = (B + A)X \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (B + A)^{-1} \cdot 2A = (B + A)^{-1}\,(B + A)X \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (B + A)^{-1}\, 2A = I \cdot X \;\rightarrow\; X = (B + A)^{-1}\, 2A$

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallamos $(B + A)^{-1}$:

$$|B + A| = 12;\;\; Adj\,(B + A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; [Adj\,(B + A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ \\ 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}\; X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{12} = A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 = I^3 = I$$

Hallamos A^{-1}:

$$|A| = 1 \;\rightarrow\; Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; [Adj\,(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{12} + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5 **Sea M una matriz de orden tres cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y de la que sabemos que $det(M) = -2$. ¿Cuál será el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$? Justifica tu respuesta.**

Resolución

$M = (F_1 \;\; F_2 \;\; F_3)$, $|M| = -2$

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 + F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

(1) Cambiamos el signo del determinante al permutar F_1 y F_2.

(2) Sacamos como factor común el 2 en F_1 y –1 en F_2.

(3) El valor del determinante no cambia al restar F_1 a F_2, ni al sumar F_2 a F_3.

6 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices B que conmutan con A; es decir, tales que: $A \cdot B = B \cdot A$**

Resolución

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ d = a-b \\ a-c = d \\ b-d = c-d \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = b \\ d = a-b \end{array}$$

Hay infinitas soluciones. Las matrices B que cumplen $A \cdot B = B \cdot A$ son de la forma:

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

7 **Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases, A, B y C, cuyos precios y pesos son los de esta tabla:**

	PESO (g)	PRECIO (€)
A	250	1,00
B	500	1,80
C	1 000	3,30

Una farmacia compra 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 €. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

Resolución

Llamemos: $\begin{cases} x = \text{n.° de envases de } A \\ y = \text{n.° de envases de } B \\ z = \text{n.° de envases de } C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 0{,}25x + 0{,}5y + z = 2{,}5 \\ x + 1{,}8y + 3{,}3z = 8{,}9 \end{cases}$

Resolvemos por la regla de Cramer: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1,8 & 3,3 \end{vmatrix} = -0,025$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2,5 & 0,5 & 1 \\ 8,9 & 1,8 & 3,3 \end{vmatrix}}{-0,025} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0,25 & 2,5 & 1 \\ 1 & 8,9 & 3,3 \end{vmatrix}}{-0,025} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0,25 & 0,5 & 2,5 \\ 1 & 1,8 & 8,9 \end{vmatrix}}{-0,025} = 1$$

Solución: La farmacia ha comprado 2 envases del producto A, 2 del B y 1 del C.

8 **La suma de las tres cifras de un número es 6. Si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcula dicho número.**

Resolución

Sea a la cifra de las centenas; b, la de las decenas, y c, la de las unidades. El número es $100a + 10b + c$.

- Sabemos que: $a + b + c = 6$
- Si intercambiamos la 1.ª y 2.ª cifras, resulta:

$$100b + 10a + c = 100a + 10b + c + 90 \;\rightarrow\; a = b - 1$$

- Si intercambiamos la 2.ª y la 3.ª, tendremos:

$$100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 9 \;\rightarrow\; c = 1 + b$$

- Resolvemos, pues, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 6 \\ a = b - 1 \\ c = 1 + b \end{array}\right\} \; a = 1; \;\; b = 2; \;\; c = 3$$

El número buscado es 123.

9 **En la región determinada por $x + y \geq 2$; $x \leq y$; $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 3x + 4y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?**

Resolución

La región factible es la zona sombreada, con vértices $A(1, 1)$ y $B(0, 2)$.

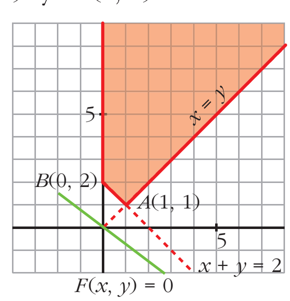
Calculamos el valor de F en A y en B:

$$F(1, 1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$$

$$F(0, 2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$$

Se alcanza el mínimo en el punto $A(1, 1)$.

No puede alcanzar el máximo por ser una región abierta.



10 **El jefe de seguridad de un museo estudia combinar dos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para las salas más importantes y un máximo de 15 cámaras con las que quedarían cubiertas todas las salas. El número de alarmas debe ser, al menos, 6. Tiene un presupuesto de 36 000 €; cada cámara cuesta 1 000 €, y cada alarma, 500 €.**

a) ¿Qué combinaciones se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa el conjunto de soluciones. ¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas?

b) Si desea colocar el mayor número de dispositivos, entre cámaras y alarmas, ¿cuántos ha de colocar de cada tipo y cuál será el coste?

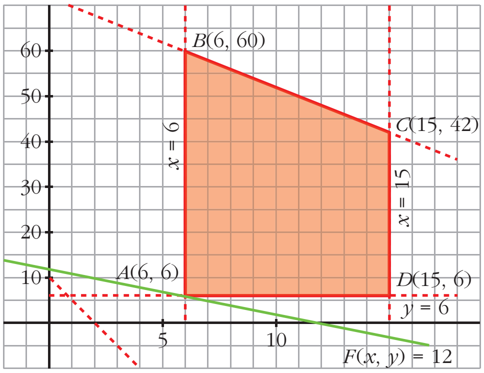
Resolución

Es un problema de programación lineal.

a) Sean x: número de cámaras e y: número de alarmas.

Las restricciones son: $6 \le x \le 15$; $y \ge 6$; $1\,000x + 500y \le 36\,000$

Para representar la región factible, dibujamos las rectas:



$x = 6$; $x = 15$; $y = 6$

$1\,000x + 500y = 36\,000 \rightarrow 2x + y = 72$

El conjunto de soluciones son todos los puntos con las dos coordenadas enteras que se encuentran en la región factible.

No se pueden instalar 7 cámaras y 59 alarmas porque no se cumpliría la última restricción:

$7 \cdot 1\,000 + 500 \cdot 59 = 36\,500 > 36\,000$

b) La función objetivo es $F(x) = x + y$.

Su máximo se alcanza en uno de los vértices de la región factible.

$F(6, 6) = 6 + 6 = 12$ $\quad F(15, 42) = 15 + 42 = 57$

$F(15, 6) = 15 + 6 = 21$ $\quad F(6, 60) = 6 + 60 = 66$

El máximo se alcanza instalando 6 cámaras y 60 alarmas.

El coste total será: $1\,000 \cdot 6 + 500 \cdot 60 = 36\,000$ €

11 **Una empresa produce dos tipos de microprocesadores, A y B. El A requiere 3 minutos de fabricación y 2 minutos de montaje, y el B requiere 2 minutos de fabricación y 4 minutos de montaje. Si solo se dispone diariamente de 4 horas para la fabricación y 4 horas para el montaje, siendo el beneficio obtenido de 160 € por cada microprocesador A y de 190 € por cada microprocesador B, se pide, justificando la respuesta:**

a) ¿Cuántos microprocesadores hay que producir de cada tipo para obtener unos beneficios máximos?

b) ¿Cuál será el valor de dichos beneficios máximos?

Resolución

a) Llamamos x al número de microprocesadores del tipo A e y al número de microprocesadores del tipo B.

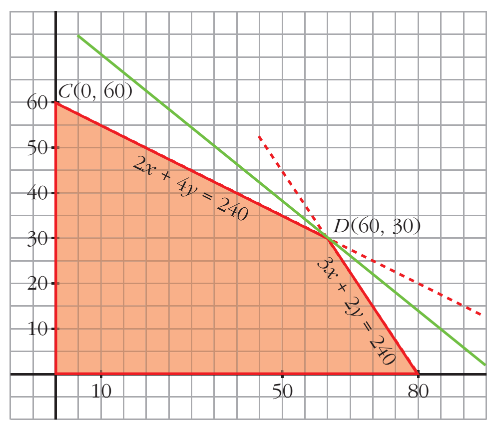
	TIPO A	TIPO B	TIEMPO DISPONIBLE
FABRICACIÓN (min)	$3x$	$2y$	240
MONTAJE (min)	$2x$	$4y$	240
BENEFICIO (€)	$160x$	$190y$	

- La función objetivo que hay que maximizar es $F(x, y) = 160x + 190y$.

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 240 \\ 2x + 4y \le 240 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

- La región factible es la zona sombreada:



- Calculamos las coordenadas del vértice D:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{240-3x}{2} \\ y &= \frac{120-x}{2} \end{aligned}\right\} \frac{240-3x}{2} = \frac{120-x}{2} \Rightarrow 120 = 2x \Rightarrow x = 60,\ y = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(60, 30)$$

Para obtener el máximo, hallamos los valores de $F(x, y)$ en los vértices de la región factible:

$F(0, 60) = 11\,400$ $\quad F(60, 30) = 9\,600 + 5\,700 = 15\,300$ $\quad F(80, 0) = 12\,800$

b) El beneficio máximo es de 15 300 euros y se obtiene produciendo 60 microprocesadores del tipo A y 30 del tipo B.