UNIDAD DIDÁCTICA 2:
ALGEBRA DE MATRICES

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 70

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, **calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \quad 7) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \quad 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \quad 3) - (2 \quad 3) = (0 \quad 0)$

4 **Dadas las matrices:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

a) $$\left.\begin{aligned} &(A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (A+B)^t = A^t + B^t$$

b) $$\left.\begin{aligned} &(3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (3A)^t = 3A^t$$

5 **Calcula** $3AA^t - 2I$, **siendo** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba que** $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$$\left.\begin{aligned} &A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

7 **Calcula, en cada caso, la matriz** B **que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

8 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

9 **¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?**

La matriz unidad, I.

10 **Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

11 **Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1}, comprueba que:**

a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

a) $\left.\begin{array}{l} (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $\left.\begin{array}{l} (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

12 Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango de una matriz

13 Di cuál es el rango de las matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$ran\ (A) = 3$ (ya está en forma escalonada)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$$

14 Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2 \cdot 2^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \to \ ran\ (A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \ ran\ (C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \ ran\ (D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

Ecuaciones con matrices

15 **Halla las matrices X e Y que verifican el sistema**
S
$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left. \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to \ X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16 S **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\[2em] B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17 S **Determina los valores de m para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.**

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2m^2 - 5m + 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

18 S **Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-\ \ y = 3+2x \\ 3x+2y = 3y-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=-3 \\ 3x-y=-2 \end{array}\right\}$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solución: $x = \frac{-5}{4}$; $y = \frac{-7}{4}$

Página 71

PARA PRACTICAR

19 S **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, **calcula** $A^2, A^3, \dots, A^{128}$.

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$; $A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

20 S **Comprueba que** $A^2 = 2A - I$, **siendo:** $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **e** I **la matriz unidad de orden 3.**

Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$

$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$

$= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

21 S **Determina** a **y** b **de forma que la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ **verifique** $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 4-a=2 & \rightarrow \quad a=2 \\ -2-b=-1 & \rightarrow \quad b=-1 \\ 2a+ab=a & \rightarrow \quad 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \rightarrow \quad -2+1=-1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

22 S **Calcula A^n y B^n siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

23 S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^{-1} AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24 S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)\ (I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

25 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A + I)^2 = \mathbf{0}$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.**

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$(A + I)^2 = \mathbf{0} \;\rightarrow\; (A + I)\ (A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; A^2 = -2A - I$

26 **a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:**

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1\ \ -2\ \ 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \;\rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\rightarrow\; X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \;\; -2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

27 S **Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:**

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por 2 la 2ª ecuación y sumando, obtenemos:

$$7A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos B de la 2ª ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

28 S **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$\rightarrow$ $ran\,(M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \; 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

- *Si* $k = -\frac{1}{2}$, *ran* $(N) = 2$.
- *Si* $k \neq -\frac{1}{2}$, *ran* $(N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 3^a : 4 \\ 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = -2 \to$ *ran* $(P) = 1$
- *Si* $k \neq -2 \to$ *ran* $(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = 2 \to$ *ran* $(Q) = 2$
- *Si* $k \neq 2 \to$ *ran* $(Q) = 3$

29 Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que *ran* $(A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

30 Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -15X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

31 **Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ halla dos números reales m y n tales que $A+mA+nI=\mathbf{0}$.**

$$A+mA+nI=\mathbf{0} \;\to\; \begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2+2m+n & 1+m\\ 2+2m & 3+3m+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \;\to\; \begin{cases}2+2m+n=0 & \to\; n=0\\ 1+m=0 & \to\; m=-1\\ 2+2m=0 & \to\; m=-1\\ 3+3m+n=0 & \to\; n=0\end{cases}$$

Solución: $m=-1;\;\; n=0$

32 **Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A-kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:**

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A-kI=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2=\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2-1 & 2k-2 & 4k-4\\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4\\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \;\to\; k=1$$

33
S **Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.**

$$\text{Cada mes:}\quad \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS}\\ \text{MECEDORAS}\\ \text{SILLAS}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{E} & \text{M} & \text{L}\end{array}\\ \begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 12 & 8 & 5\\ 18 & 20 & 12\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\text{Cada año:}\quad 12\cdot\begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 12 & 8 & 5\\ 18 & 20 & 12\end{pmatrix}=\begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS}\\ \text{MECEDORAS}\\ \text{SILLAS}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{E} & \text{M} & \text{L}\end{array}\\ \begin{pmatrix}240 & 180 & 120\\ 144 & 96 & 60\\ 216 & 240 & 144\end{pmatrix}\end{array}$$

Página 72

34 **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.**
S

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

35 **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.**
S

$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$ **Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.**

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$

36 **Escribe en forma matricial y resuelve, si es posible, utilizando la matriz inversa:**

a) $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x + \ \ y = 7 \end{array} \right.$ **b)** $\left\{ \begin{array}{l} x \quad + z = \ \ 510 \\ \quad y \qquad = -234 \\ \quad y + z = \ \ 257 \end{array} \right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x + \ \ y = 7 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \cdot 3 + 2^a \cdot 2 \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a : 3 \\ 2^a : 3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \to \textit{Solución: } x = 5,\ y = 2$$

b) $\left.\begin{array}{rl} x \quad + z = & 510 \\ y \qquad = & -234 \\ y + z = & 254 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a - 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -234 \\ 488 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 22,\ y = -234,\ z = 488$

37 Escribe en la forma habitual los sistemas:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ x + 5y = 0 \\ 7y = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 5y - 3z = 1 \\ 2x + \ \ y + 5z = -1 \end{array}\right\}$

38
S

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) Una matriz X tal que $XA = (1 \quad 0 \quad -1)$.

b) Una matriz Y tal que $YA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 6 \cdot 1^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a - 5 \cdot 3^a \\ 3^a \cdot (-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -24 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a : (-2) \\ 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a - 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right). \text{ Por tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $X = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot A^{-1} = (1 \quad 3 \quad 1)$

b) $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

39
S

Calcula los valores de x para que la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuaci
$A^2 - 6A + 9I = 0$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

40 S **Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.**

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + 1^a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación:

$$2A + AX + B = 0 \quad \to \quad AX = -B - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

41 S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ halla el valor de x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} -2 - 2x - y = 0 & \to & y = -2 - 2x = -8 \\ 9 - 3x = 0 & \to & x = 3 \\ -6 + 2x = 0 & \to & x = 3 \\ -5 - x - y = 0 & \to & y = -5 - x = -8 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 3$, $y = -8$

42 S **Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Calcula $A + A^2$

b) Resuelve el sistema $A^5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de A^5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot 2 - 1^a \\ 3^a \cdot 2 - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow (A^5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 20$, $y = -5$, $z = -9$

43
S **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $A \cdot B + C = 3D$, plantea un sistema de ecuaciones para determinar x, y, z.

b) Encuentra, si es posible, una solución.

a) $A \cdot B + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$

$3D = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} \text{ En forma matricial: } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

b) Intentamos resolver el sistema en forma matricial. Para ello, calculamos la inversa de M:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + (3/2) \cdot 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, la matriz M no tiene inversa.

Como $ran(M) = 2$ y se nos anula la segunda ecuación, tomamos las otras dos para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} \ (1^a + 2^a) \quad \to \quad \begin{array}{l} 2y = 4 \quad \to \quad y = 2 \\ x = 3 - y - z = 1 - z \end{array}$$

Solución: $(1 - \lambda, 2, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

44 S **Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2a & 2 + 2b - 2a \\ 0 & 1 + 2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

45 S **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}\right\} \quad a = b = c$$

46 S **Dada la matriz:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **prueba que se verifica** $A^3 + I = \mathbf{0}$ **y utiliza esta igualdad para obtener** A^{10}**.**

☛ *Haz* $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ *y ten en cuenta que* $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \;\rightarrow\; A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Página 73

47 S **Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula x **e** y **para que esta matriz** A **sea ortogonal:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3/5} & x & \mathbf{0} \\ y & \mathbf{-3/5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

☛ *Haz* $A \cdot A^t = I$.

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$, entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \dfrac{3}{5}y - \dfrac{3}{5}x = 0 \\ y^2 + \dfrac{9}{25} = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{16}{25} \\ y = x \\ y^2 = \dfrac{16}{25} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4}{5} \\ y = x \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \dfrac{4}{5};\ y_1 = \dfrac{4}{5}$ $\qquad x_2 = -\dfrac{4}{5};\ y_2 = -\dfrac{4}{5}$

48 S **Resuelve la ecuación matricial:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$