



## UNIDAD DIDÁCTICA 05: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

\* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

### Página 147

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PARA PRACTICAR

1 Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 3$ .

¿En cuáles de los siguientes casos hay indeterminación para  $x \rightarrow +\infty$ ?

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

- a)  $f(x) + g(x)$                       b)  $g(x) + b(x)$                       c)  $\frac{f(x)}{b(x)}$   
d)  $\frac{f(x)}{g(x)}$                               e)  $[b(x)]^{g(x)}$                       f)  $[3 - b(x)] \cdot f(x)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)) = +\infty + (-\infty) = \\ &= +\infty - (+\infty) \rightarrow \text{Indeterminación.} \end{aligned}$$



$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + b(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = -\infty + 3 = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{-\infty} \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} [b(x)]^{g(x)} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} [3 - b(x)] \cdot f(x) = 0 \cdot (+\infty) \rightarrow \text{Indeterminación.}$$

**2** Calcula los límites cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{2x + 5}{2 - x}$$

$$b) g(x) = \frac{10x - 5}{x^2 + 1}$$

$$c) h(x) = \frac{3x^2 - 4}{2x + 3}$$

$$d) i(x) = \frac{x^3 + 2x}{7 + 5x^3}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 5}{2 + x} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4}{-2x + 3} = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x}{7 + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - 2x}{7 - 5x^3} = \frac{1}{5}$$

**3** Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2 - 7}{x + 1}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2 - 7}{x + 1}} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}} = 0$$



**4** Calcula estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7})$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

**5** Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5^x + 1)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (0,5^{-x} + 1) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x+1} = 0$



**6** Sabiendo que:

$\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} q(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2} s(x) = 0$

di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{p(x)}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x) \cdot q(x)]$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x)]^p(x)$       d)  $\lim_{x \rightarrow 2} [p(x) - 2q(x)]$

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{p(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty) \rightarrow$  Indeterminado.



$$c) \lim_{x \rightarrow 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

7

Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \qquad b) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right]$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{2}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$$

8 Calcula el límite de las siguientes funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$a) f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} \qquad b) g(x) = \frac{x+1}{\log x}$$

$$c) b(x) = \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} \qquad d) i(x) = \frac{3^x}{2^x + 1}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{5}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\log x} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{2^x + 1} = +\infty$$



**9** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x + 1}{x - 3} \right)^{1-x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1,2^x - \frac{3x^2}{x + 1} \right)$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x-1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 10x - 3x(x + 1)}{2(x + 1)} \right) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x + 1}{x - 3} \right)^{1-x} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1,2^x - \frac{3x^2}{x + 1} \right) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x-1} = \left( \frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

**Página 148**

**10** Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 5}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 5} = \frac{0}{-4} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 6)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 6) = -5$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{2x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{2x} = \frac{3}{2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x - 3)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 3)}{x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$

**11** Averigua si estas funciones son continuas en  $x = 2$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6 - x) = 4 \\ f(2) = 6 - 2 = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } x = 2, \\ \text{puesto que } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2). \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ no es continua en } x = 2, \\ \text{puesto que no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x). \end{array}$$

## 12 Estudia la continuidad de estas funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) • Si  $x \neq 2 \rightarrow$  Es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ En } x = 2: \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2^x = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 = 4 \\ f(2) = 4 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2$$

Por tanto,  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

b) El dominio de la función es  $D = \mathbb{R} - \{0\}$ .

• Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1 \rightarrow$  La función es continua.

• En  $x = 0$ : Es discontinua, puesto que  $f(x)$  no está definida para  $x = 0$ . Además,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . Hay una asíntota vertical en  $x = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ En } x = 1: \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } x = 1, \\ \text{pues } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1). \end{array}$$

## PARA RESOLVER

13 a) Calcula el límite de la función  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 2$ ,  $x \rightarrow 3$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ :

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x - 3}{(x - 3)(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{(0)}$$

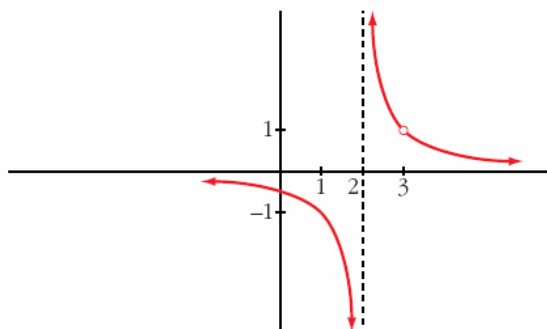


los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

b)



14 a) Calcula el límite de la función  $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$  en los puntos en los que no está definida.

b) Halla su límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

c) Representa la función con la información que obtengas.

d) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de esta función?

a) El dominio de la función es:  $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$ , pues el denominador se anula en:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}$$

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x(x - 3)}$$

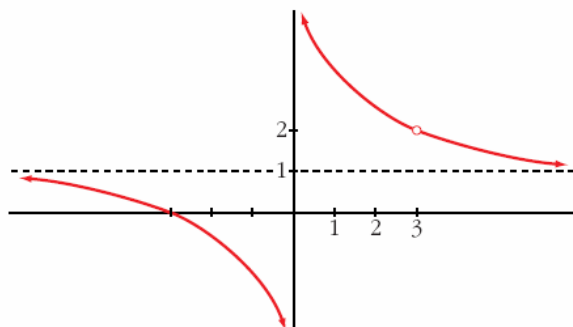
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x} = \frac{3}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 3}{x} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 3}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{x} = 1$

c)





d) La función es discontinua en  $x = 0$  (tiene una asíntota vertical) y en  $x = 3$  (no está definida; tiene una discontinuidad evitable).

**15** Sea la función  $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$ .

a) Calcula:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) ¿Cuál es la función que coincide con  $f(x)$  excepto en  $x = 0$  y en  $x = 1$ ?

c) ¿En qué puntos no es continua  $f(x)$ ?

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x(x-2)] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [x(x-2)] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

b)  $g(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

c) En  $x = 0$  y en  $x = 1$ . La función no está definida en estos valores (hay discontinuidades evitables).

**16** Calcula el límite de la función  $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x^2 - 8}$  cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 2$  y  $x \rightarrow -2$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{-8} = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2}{(0)}$ . Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

•  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{6}{(0)}$ . Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$





**17** Calcula el límite de la función  $f(x) = 2 + \frac{x}{x+1}$  cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  y  $x \rightarrow -1$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 + \frac{-1}{(0)}$ . Hallamos los límites laterales:  
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

**18** Calcula el valor que debe tener  $k$  para que las siguientes funciones sean continuas:

a)  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ k-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \leq 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si  $x \neq 2$ , la función es continua.

• En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (k-x) = k-2 \\ f(2) = 2+1 = 3 \end{array} \right\} \text{ Para que sea continua, ha de ser: } k-2 = 3 \rightarrow k = 5$$

b) • Si  $x \neq 0$ , la función es continua.

• En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+k) = k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2-1) = -1 \\ f(0) = 0+k = k \end{array} \right\} \text{ Para que sea continua, ha de ser: } k = -1$$

**19** Calcula el valor de  $k$  para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • Si  $x \neq 1$ , la función es continua.

• Si  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3+x^2+x+1)(x-1)}{(x-1)} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$$f(1) = k$$

Para que sea continua, ha de ser  $k = 4$ .

b) Para  $x \neq 1$ ,  $f(x)$  es continua.

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ , ha de ser  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} k = k \\ f(1) &= k \end{aligned} \right\}$$

Ha de ser  $k = 2$ .

**20** Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro  $a$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) • En  $x \neq 2$ , la función es continua.

• En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) &= 4 + 2a \end{aligned} \right\} \text{ Para que sea continua, ha de ser: } \\ 4 + 2a = a - 4 \rightarrow a = -8$$

Por tanto, la función es continua si  $a = -8$ , y es discontinua (en  $x = 2$ ) si  $a \neq -8$ .

b) • En  $x \neq 0$ , la función es continua.

• En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ Para que sea continua, ha de ser: } \\ 1 = 2a \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la función es continua si  $a = \frac{1}{2}$ , y es discontinua (en  $x = 0$ ) si  $a \neq \frac{1}{2}$ .



## Página 149

### 21 Estudia la continuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 1 \rightarrow$  la función es continua.

• Si  $x = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array} \right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

• Si  $x = 1 \rightarrow$  No es continua, pues no está definida en  $x = 1$ ; no existe  $f(1)$ .  
Además:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \end{array} \right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

### 22 Estudia la continuidad de las siguientes funciones, represéntalas gráficamente y di cuáles son sus límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

#### • Continuidad:

— Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1 \rightarrow$  Es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{— En } x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \\ \text{No existe } f(0). \end{array} \right\}$$

Hay una discontinuidad evitable en  $x = 0$ .



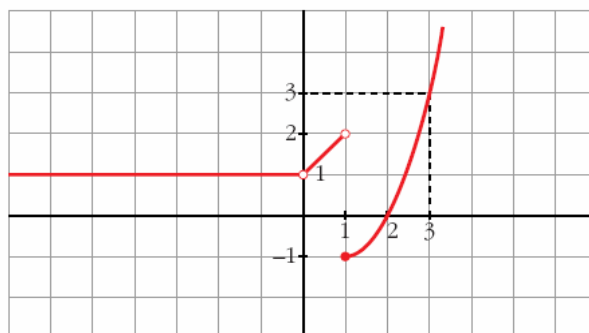
$$\text{— En } x = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Discontinuidad de salto finito en  $x = 1$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$

• **Gráfica:**



$$b) f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

• **Continuidad:**

— Si  $x \neq 3$  y  $x \neq 6$  → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\text{— En } x = 3 \rightarrow \left. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$f(x)$  es continua en  $x = 3$ .

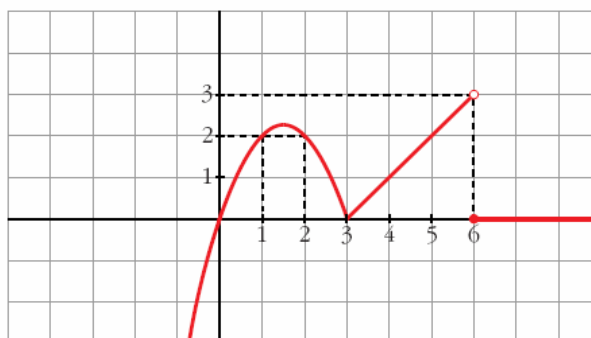
$$\text{— En } x = 6 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (x - 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} 0 = 0 \\ f(6) = 0 \end{cases}$$

Discontinuidad de salto finito en  $x = 6$ .



- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

• **Gráfica:**



**23** Representa gráficamente la función  $f(x)$  y estudia su continuidad:  
**S**

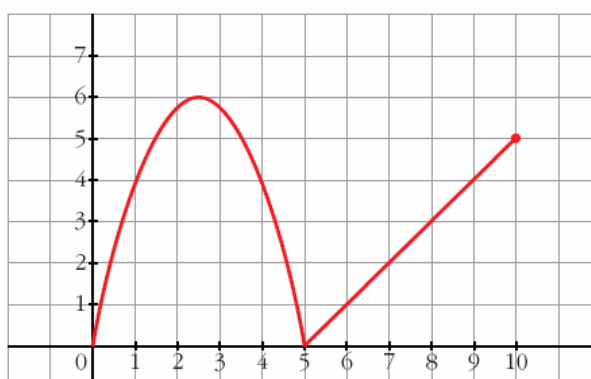
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \left. \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases} \right\} \text{Dominio} = [0, 10]$$

• **Continuidad:** Si  $x \in [0, 5) \cup (5, 10]$ , es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\text{En } x = 5 \rightarrow \left. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-x^2 + 5x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x - 5) = 0 \\ f(5) = 0 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5). \\ \text{Es continua} \end{array}$$

• **Gráfica:**





**24** Dada la función:

S

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + b & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcula el valor de  $b$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = -1$ . ¿Es continua en  $x = 1$ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + b & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = -1$ , ha de tenerse que:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{1}{x^2} + b \right) = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x^2 + 4) = 7 \\ f(-1) = 1 + b \end{array} \right\} \text{ Ha de ser } 1 + b = 7; \text{ es decir, } b = 6.$$

- Veamos que la función también es continua en  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + 4) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^3 + 8) = 7 \\ f(1) = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 1 \end{array}$$

**25** Representa, estudia la continuidad y halla los límites para  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$  de la función:

S

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **Continuidad:**

— Si  $x \neq 1$  y  $x \neq 2 \rightarrow$  Es continua, pues está formada por funciones continuas.



$$\text{— En } x = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

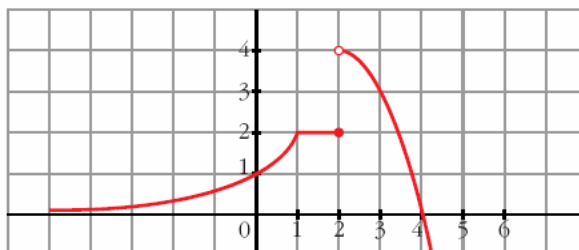
$$\text{— En } x = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x) = 4 \\ f(2) = 2 \end{array} \right.$$

Discontinuidad de salto finito en  $x = 2$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$$

• **Gráfica:**



26 S Sea  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

• **Continuidad:**

— Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 2 \rightarrow$  Es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\text{— En } x = -1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

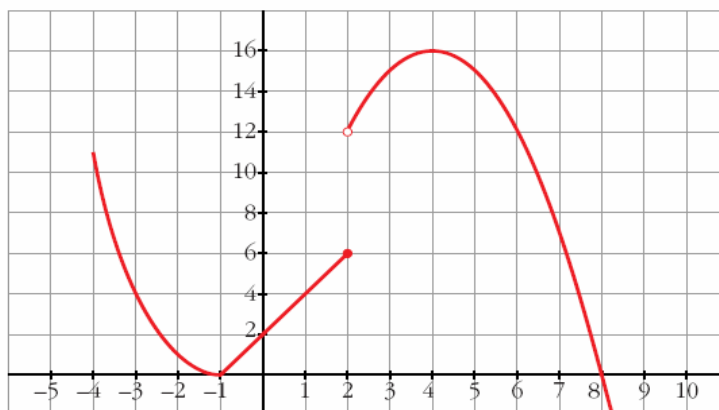
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1.$$



$$\text{— En } x = 2 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 2) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 6 \end{cases}$$

Discontinuidad de salto finito en  $x = 2$ .

• **Gráfica:**



27 S Dada  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

• **Continuidad:**

— Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 3$  → Es continua (está formada por funciones continuas).

$$\text{— En } x = 0 \rightarrow \left. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 0. \end{array}$$

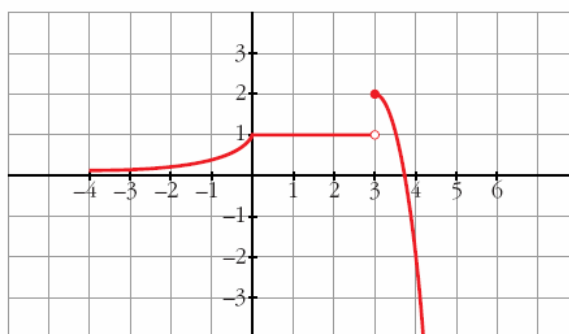
$$\text{— En } x = 3 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

Discontinuidad de salto finito en  $x = 3$ .





• Gráfica:



**28** El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2}, \text{ donde } t \text{ se mide en años transcurridos desde } t = 0.$$

Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo.

$$P(0) = 15 \text{ millones de individuos}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2} = 1 \text{ millón de individuos}$$

**29** Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor  $x$  (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0,01x & \text{si } 0 \leq x \leq 100 \\ \frac{30x}{2x + 2300} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de  $f(x)$ . Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 €.

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes? Justifica tu respuesta.

a) Dominio =  $[0, +\infty)$

— Si  $x \neq 100 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos definidos.

$$\text{— En } x = 100 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 100^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} 0,01x = 1 \text{ (100 €)} \\ \lim_{x \rightarrow 100^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 100^+} \frac{30x}{2x + 2300} = 1,2 \text{ (120 €)} \\ f(100) = 1 \text{ (100 €)} \end{cases}$$



Hay una discontinuidad de salto finito en  $x = 100$

Como  $\lim_{x \rightarrow 100^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 100^+} f(x)$ , el incentivo recibido por un empleado sí es sensiblemente distinto si el valor de sus ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 € ( $x = 100$ ).

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30x}{2x + 2300} = 15 \rightarrow 1500 \text{ €}$$

**30**  
**S** Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función

$$f(t) = \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}, \text{ siendo } t \text{ el número de años transcurridos. Se pide:}$$

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

a)  $f(0) = 5\,000$  individuos.

b) T.V.M.  $[4, 9] = \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{7\,250 - 7\,000}{5} = \frac{250}{5} = 50$

Aumenta en 250 individuos, lo que supone un aumento medio de 50 por año.

c)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2} = 7\,500$

Se estabilizaría en 7 500 individuos.

## Página 150

**31**  
**S** Se ha investigado el tiempo ( $T$ , en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas ( $x$ , en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x + 30}, & 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1\,125}{(x - 5)(x - 15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función  $T$  es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?



$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30}, & 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) • La función  $y = \frac{300}{x+30}$  es continua, salvo en  $x = -30$ ; pero, como solo la consideramos en  $0 \leq x \leq 30$ , será continua en el intervalo  $(0, 30)$ .

• La función  $y = \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2$  es continua, salvo en  $x = 5$  y en  $x = 15$ ; pero como la estamos considerando para  $x > 30$ , es continua en el intervalo  $(30, +\infty)$ .

• Por tanto, si  $x \neq 30$  ( $x \in [0, 30) \cup (30, +\infty)$ ), la función  $T(x)$  es continua.

• Si  $x = 30$ , tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 30^-} T(x) &= \lim_{x \rightarrow 30^-} \frac{300}{x+30} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 30^+} T(x) &= \lim_{x \rightarrow 30^+} \left( \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 \right) = 5 \\ T(30) &= 5 \end{aligned} \right\} T(x) \text{ es continua en } x = 30.$$

• Por tanto,  $T(x)$  es continua en su dominio.

b)  $T(0) = 10$  minutos; y, a mayor tiempo de entrenamiento, menos tardan en realizar la prueba. Además:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 \right) = 2$$

Por tanto, ningún deportista sería capaz de realizar la prueba en menos de 1 minuto ni en menos de 2 minutos.

**32** Se ha comprobado que las pérdidas o ganancias de una empresa se ajustan a la función  $y = \frac{2x-4}{x+2}$ , siendo  $x$  los años de vida de la empresa ( $x \geq 0$ ) e  $y$  en cientos de miles de €.

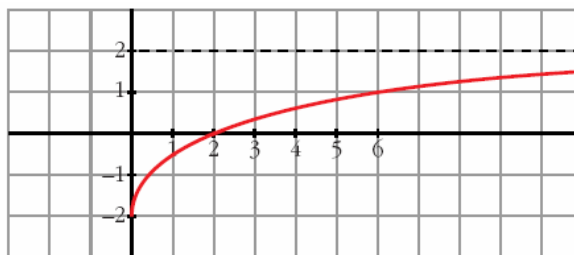
a) Representa la función.

b) ¿En qué año deja de tener pérdidas?

c) ¿Están limitados sus beneficios? Si lo están, ¿cuál es su límite?



a)



b)  $\frac{2x-4}{x+2} = 0 \Rightarrow 2x-4 = 0 \Rightarrow x = 2$  (y la función es creciente).

Deja de tener pérdidas en el 2º año ( $x = 2$ ).

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{x+2} = 2 \rightarrow 200\,000 \text{ €}$

El beneficio está limitado a 200 000 €.

- 33** Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada  $x$  unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla  $a$  de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

• El precio de una unidad es  $C(x)/x$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (5x) = 50$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$$

$$C(10) = 50$$

Para que sea continua, ha de ser:

$$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2500 \rightarrow 100a = 2000 \rightarrow a = 20$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ €}$