

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Página 100

1 De entre las ecuaciones siguientes:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$9x^2 + 4 = 0$$

a) Señala las que no tienen soluciones en \mathbb{Q} .

b) ¿Cuáles tienen solución en \mathbb{R} ?

Resolución

Resolvemos las ecuaciones:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$9x^2 + 4 = 0$ no tiene solución.

a) No tienen solución en \mathbb{Q} : $2x^2 - 4 = 0$; $x^2 + x - 1 = 0$; $9x^2 + 4 = 0$

b) Todas tienen solución en \mathbb{R} salvo $9x^2 + 4 = 0$.

2 Compara $\sqrt[4]{5}$ y $\sqrt[12]{120}$ reduciéndolas a índice común.

Resolución

Como $\sqrt[4]{5} = \sqrt[3 \cdot 4]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, resulta que:

$$\sqrt[4]{5} > \sqrt[12]{120}$$

3 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\sqrt{a^3} - 2a^4\sqrt{a^2} + 3a^6\sqrt{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $\frac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

d) $\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Resolución

a) $a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = a\sqrt{a}$

b) $\frac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \frac{30\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 30$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

d) $\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{2(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} - \frac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{2\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{12} - \frac{4\sqrt{6}}{3} =$
 $= \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} - \frac{4\sqrt{6}}{3} =$
 $= \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{6}$

4 Si $\log k = -1,3$ calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log k^3$

b) $\log \frac{1}{k}$

c) $\log \frac{k}{100}$

Resolución

a) $\log k^3 = 3 \log k = 3(-1,3) = -3,9$

b) $\log \frac{1}{k} = \log 1 - \log k = 0 - (-1,3) = 1,3$

c) $\log \frac{k}{100} = \log k - \log 100 = -1,3 - 2 = -3,3$

5 Halla x en cada caso:

a) $|7 - 3x| = 2$

b) $|x^2 - 3| = 1$

Resolución

a) $|7 - 3x| = 2 \begin{cases} 7 - 3x = 2 \rightarrow x = \frac{5}{3} \\ 7 - 3x = -2 \rightarrow x = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \frac{5}{3}$; $x_2 = 3$

$$b) |x^2 - 3| = 1 \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \rightarrow x^2 = 4 < \begin{matrix} x = 2 \\ x = -2 \end{matrix} \\ x^2 - 3 = -1 \rightarrow x^2 = 2 < \begin{matrix} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{matrix} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = -\sqrt{2}$

6 Calcula x para que $2^{x+1} = 3^x$.

Resolución

$$2^{x+1} = 3^x \rightarrow (x+1) \log 2 = x \log 3 \rightarrow x \log 2 - x \log 3 = -\log 2$$

$$x(\log 2 - \log 3) = -\log 2 \rightarrow x = \frac{-\log 2}{\log 2 - \log 3} = 1,71$$

Solución: $x = 1,71$

7 El precio de la leche subió un 15% en enero y un 18% en febrero, y bajó un 20% en marzo. ¿Cuál ha sido la subida total en esos tres meses?

Resolución

Si el precio de la leche es p , tenemos los siguientes aumentos y disminuciones:

$$\text{enero} \rightarrow p \cdot 1,15$$

$$\text{febrero} \rightarrow (p \cdot 1,15) \cdot 1,18$$

$$\text{marzo} \rightarrow (p \cdot 1,15 \cdot 1,18) \cdot 0,80$$

El precio final es $p \cdot (1,15 \cdot 1,18 \cdot 0,80) = p \cdot 1,0856$.

Por tanto, la subida total ha sido de un 8,56%.

8 Depositamos un capital de 5 000 € al 6% anual durante 3 años y 3 meses. Calcula en cuánto se transforma si el periodo de capitalización es:

a) Trimestral

b) Mensual

c) Di, en cada caso, cuál es la T.A.E.

Resolución

a) Un 6% anual significa un $\frac{6}{4} = 1,5\%$ trimestral.

3 años y 3 meses son 13 trimestres. Así,

$$C_F = 5000 \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^{13} = 6067,76 \text{ €}$$

b) Un 6% anual significa un $\frac{6}{12} = 0,5\%$ mensual.

3 años y 3 meses son 39 meses. Así,

$$C_F = 5\,000 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{39} = 6\,073,60 \text{ €}$$

c) • La T.A.E. correspondiente a un 6% anual con períodos de capitalización trimestrales, es:

$$6\% \text{ anual} \rightarrow \frac{6}{4} = 1,5\% \text{ trimestral} \rightarrow 1,015 \text{ trimestral}$$

Como son 4 trimestres, $1,015^4 = 1,0614$.

Por tanto, la T.A.E. es del 6,14%.

• La T.A.E. correspondiente a un 6% anual con períodos de capitalización mensuales, es:

$$6\% \text{ anual} \rightarrow \frac{6}{12} = 0,5\% \text{ mensual} \rightarrow 1,005 \text{ mensual}$$

Como son 12 meses, $1,005^{12} = 1,0617$.

Por tanto, la T.A.E. es del 6,17%.

9 Recibimos un préstamo de 10 000 € al 13% anual, que debíamos devolver en un solo pago. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido si al liquidarlo pagamos 16 304,7 €?

Resolución

Si lo pagáramos en 1 año, se pagaría:

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{13}{100}\right) = 10\,000 \cdot 1,13$$

Si fuera en dos años:

$$10\,000 \cdot 1,13^2$$

Por tanto, para saber cuántos años hemos tardado en liquidar la deuda, tenemos que resolver la ecuación:

$$10\,000 \cdot 1,13^a = 16\,304,7 \rightarrow 1,13^a = \frac{16\,304,7}{10\,000} = 1,63047 \rightarrow a = \frac{\log 1,63047}{\log 1,13} = 4$$

Así, hemos tardado 4 años en devolver el crédito de 10 000 € al banco.

10 Un banco nos presta 30 000 € al 10% anual, que hemos de devolver en 3 años mediante pagos mensuales. ¿Cuánto tendremos que pagar cada mes?

Resolución

Debemos pagar 30 000 € en 36 meses, a un 10% anual.

$$10\% \text{ anual} \rightarrow \frac{10}{12} = 0,83\% \text{ mensual}$$

$$30\,000 \xrightarrow[\text{al } 0,83\%]{\text{en } 36 \text{ meses}} 30\,000 \cdot 1,0083^{36} = 40\,397,35$$

Ahora:

$$m(1 + 1,0083 + 1,0083^2 + \dots + 1,0083^{35}) = m \cdot \frac{1,0083^{36} - 1}{1,0083 - 1} = 41,7564m$$

Así:

$$41,7564m = 40\,397,35 \rightarrow m = \frac{40\,397,35}{41,7564} = 967,45$$

Por tanto, cada una de las mensualidades será de 967,45 €.

11 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 9x$

b) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

Resolución

a) $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3)$

b) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = x^2(3x^3 - 4x^2 - 5x + 2) = x^2(x + 1)(x - 2)(3x - 1)$

-1	3	-4	-5	2	
	3	-7	2	0	
2	3	-1	-2	0	
	3	-1	0	0	

12 Opera y simplifica:

$$\frac{(3x^2 + 4x)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Resolución

$$\begin{aligned} & \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ & = \frac{3x^4 + 3x^2 + 4x^3 + 4x - 2x^4 - 4x^3 - 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} \end{aligned}$$

13 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x + 4)^2 - 7 = (2x + 3)^2 + 2x$

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$

c) $\sqrt{2x + 3} - 2x = x - 6$

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

Resolución

a) $x^2 + 16 + 8x - 7 = 4x^2 + 9 + 12x + 2x$

$$3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

b) Hacemos el cambio $x^2 = z \rightarrow 2z^2 - 3z - 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow z = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} z = 2 \\ z = -\frac{1}{2} \text{ No vale} \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2x + 3} - 2x = x - 6$

$$\sqrt{2x + 3} = x - 6 + 2x \rightarrow (\sqrt{2x + 3})^2 = (3x - 6)^2$$

$$2x + 3 = 9x^2 + 36 - 36x \rightarrow 9x^2 - 38x + 33 = 0$$

$$x = \frac{38 \pm 16}{18} \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$x = 3 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 3 + 3} - 2 \cdot 3 = 3 - 6 \text{ Vale}$$

$$x = \frac{11}{9} \rightarrow \sqrt{2 \cdot \frac{11}{9} + 3} - 2 \cdot \frac{11}{9} = \frac{11}{9} - 6 \rightarrow \frac{7}{3} - \frac{22}{9} \neq -\frac{43}{9} \text{ No vale}$$

La solución es $x = 3$.

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 \stackrel{(*)}{=} x^2(x + 1)(x - 2)(3x - 1) = 0$

(*) Ejercicio 11 b)

Soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{1}{3}$

14 Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases}$$

Resolución

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) + x = 0 \rightarrow 3x - x^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 3 \\ x_2 = 4 \rightarrow y_2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: (0, 3) y (4, -1)

$$\text{b) } \begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2x \leq 10 \rightarrow x \leq 5 \end{cases}$$



Soluciones: $x \in (2, 5]$

15 Opera y simplifica:

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x} \right) - (x^2 - 3x)$$

Resolución

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x} \right) - (x^2 - 3x) = \\ & = \frac{(x^2 - 4)(x^3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 2x)} - (x^2 - 3x) = \frac{(x + 2)(x - 2)x(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)x(x + 2)} - (x^2 - 3x) = \\ & = (x - 2)(x - 1) - (x^2 - 3x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x = 2 \end{aligned}$$

16 Resuelve:

$$\text{a) } \frac{7 - x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{x}{x + 2} = 1 \qquad \text{b) } 3^{x^2 - 2} = \frac{1}{3} \qquad \text{c) } 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0$$

Resolución

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{7 - x}{(x + 2)^2} + \frac{x}{x + 2} = 1 & \rightarrow \frac{7 - x + x(x + 2)}{(x + 2)^2} = 1 \rightarrow \\ & \rightarrow 7 - x + x^2 + 2x = x^2 + 4x + 4 \rightarrow \\ & \rightarrow 3x - 3 = 0 \rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Solución: $x = 1$

$$b) 3^{x^2-2} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow x^2 - 2 = -1 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

$$c) (4^x)^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4 + 16 = 0 \xrightarrow[4^x=t]{\text{cambio}} t^2 - 8t + 16 = 0 \rightarrow (t-4)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = 4 \rightarrow 4^x = 4 \rightarrow x = 1$$

Solución: $x = 1$

17 Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2^{x-6} \cdot 2^y = 16 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

Resolución

$$a) \begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2^{x-6} \cdot 2^y = 16 \end{cases} \rightarrow 2^{x-6} \cdot 2^y = 2^4 \rightarrow 2^{x-6+y} = 2^4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 6 + y = 4 \rightarrow x + y = 10$$

Por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} x - 4y = 5 \\ x + y = 10 \end{cases} \xrightarrow[\begin{matrix} -2 \cdot \text{a} \\ \hline -5y = -5 \end{matrix}]{\begin{matrix} 1 \cdot \text{a} \\ \hline \end{matrix}} \begin{cases} x - 4y = 5 \\ -x - y = -10 \end{cases} \rightarrow y = 1$$

$$x + 1 = 10 \rightarrow x = 9$$

Solución: $x = 9$, $y = 1$

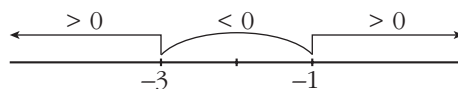
$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases} \xrightarrow[\begin{matrix} 2 \cdot \text{a} + 2 \cdot 1 \cdot \text{a} \\ 3 \cdot \text{a} - 3 \cdot 1 \cdot \text{a} \end{matrix}]{\begin{matrix} 1 \cdot \text{a} \\ \hline \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y + z = 1 & \longrightarrow x = 1 \\ 5y + z = -3 & \longrightarrow z = 2 \\ -7y = 7 & \longrightarrow y = -1 \end{cases}$$

Solución: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$

18 Resuelve: $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

Resolución

$$x^2 + 4x + 3 \geq 0 \qquad x^2 + 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$



Soluciones: $(-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

- 19** Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado?

Resolución

x : tiempo que tarda B en llenar el depósito

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 + 1}{2x} = \frac{x}{2x} \rightarrow x = 3 \text{ horas}$$

B tarda 3 horas y A tarda 6 horas.