EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 Las coordenadas de los vértices de un rectángulo son $A(2, 2)$; $B(2, 5)$; $C(6, 5)$, y $D(6, 2)$.

Halla las coordenadas y representa los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$. ¿Qué relación existe entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$? ¿Y entre $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DA}$?

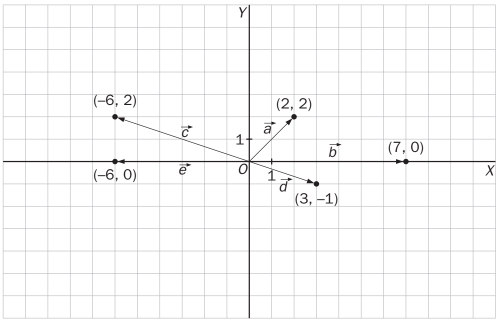
$\overrightarrow{AB} = (0, 3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (4, 0)$ $\quad \overrightarrow{CD} = (0, -3)$ $\quad \overrightarrow{DA} = (-4, 0)$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

8.2 Las coordenadas de un punto A son $(3, 1)$ y las del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(3, 4)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B? Determina otro punto C de modo que el vector $\overrightarrow{AC}$ tenga el mismo módulo y la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$, pero distinto sentido.

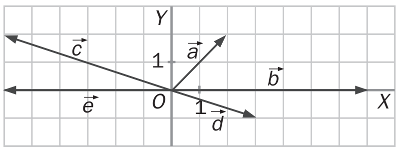
$B = (3 + 3, 4 + 1) = (6, 5)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (-3, -4)$ $\quad C = (-3 + 3, -4 + 1) = (0, -3)$

8.3 Representa los vectores $\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (7, 0)$; $\vec{c} = (-6, 2)$; $\vec{d} = (3, -1)$, y $\vec{e} = (-6, 0)$ con origen en el origen de coordenadas. ¿Qué coordenadas tienen los extremos de cada vector?



Las coordenadas de los extremos de cada vector coinciden con las coordenadas de los vectores.

8.4 Halla las coordenadas de los vectores de la figura.



$\vec{a} = (2, 2)$

$\vec{b} = (7, 0)$

$\vec{c} = (-6, 2)$

$\vec{d} = (3, -1)$

$\vec{e} = (-6, 0)$

8.5 Dados los vectores $\vec{u} = (6, 5)$; $\vec{v} = (-3, 0)$ y $\vec{w} = (2, -4)$, calcula:

a) $2\vec{u}$

b) $3\vec{v} - \vec{w}$

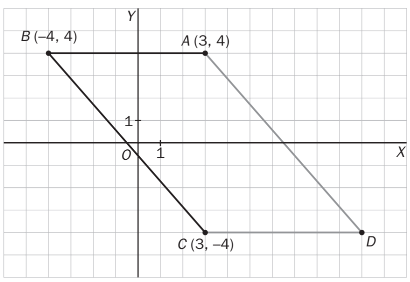
c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w}$

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (6, 5) = (12, 10)$

b) $3\vec{v} - \vec{w} = 3 \cdot (-3, 0) - (2, -4) = (-9, 0) - (2, -4) = (-11, 4)$

c) $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = 5 \cdot [(6, 5) - (-3, 0)] + (2, -4) = 5 \cdot (9, 5) + (2, -4) = (45, 25) + (2, -4) = (47, 21)$

8.6 Los vértices de un paralelogramo son $A(3, 4)$; $B(-4, 4)$; $C(3, -4)$, y D. ¿Cuáles son las coordenadas de D?



$D(10, -4)$

8.7 Dados los vectores $\vec{a} = (-7, 2)$; $\vec{b} = (10, -4)$; $\vec{c} = (14, -4)$, y $\vec{d} = (-19, 2)$, determina si son linealmente dependientes:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{d}$

c) $\vec{a}$ y $\vec{c}$

d) $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$

a) $\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow (-7, 2) = \lambda(10, -4)$ no tiene solución; por tanto, son linealmente independientes.

b) $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{d} \Rightarrow (-7, 2) = \alpha(10, -4) + \beta(-19, 2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} -7 = 10\alpha - 19\beta \\ 2 = -4\alpha + 2\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \dfrac{-3}{7} \\ \beta = \dfrac{1}{7} \end{matrix} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes.

c) $(-2) \cdot \vec{a} = \vec{c} \Rightarrow$ linealmente dependientes.

d) $\vec{b} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{d} \Rightarrow (10, -4) = \alpha(14, -4) + \beta(-19, 2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10 = 14\alpha - 19\beta \\ -4 = -4\alpha + 2\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \dfrac{7}{6} \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{matrix} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes.

8.8 Indica las coordenadas de los siguientes vectores y represéntalos gráficamente.

a) $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{b} = 10\vec{i} - 4\vec{j}$

c) $\vec{c} = 14\vec{i} - 4\vec{j}$

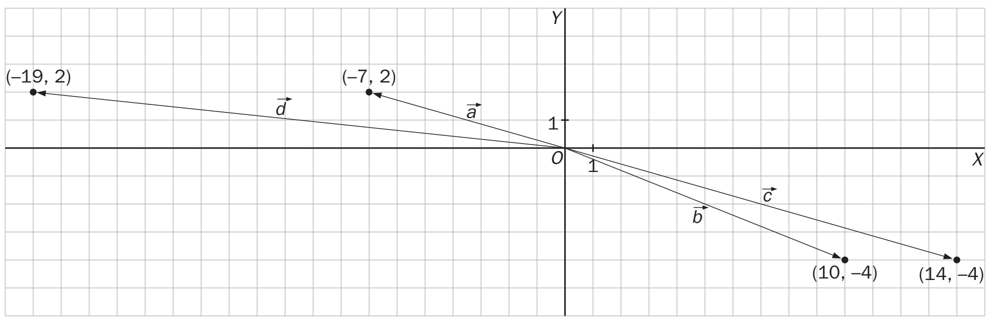
d) $\vec{d} = -19\vec{i} + 2\vec{j}$

a) $\vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{j} = -7(1, 0) + 2(0, 1) = (-7, 2)$

b) $\vec{b} = 10\vec{i} - 4\vec{j} = (10, -4)$

c) $\vec{c} = 14\vec{i} - 4\vec{j} = (14, -4)$

d) $\vec{d} = -19\vec{i} + 2\vec{j} = (-19, 2)$



8.9 Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$; $\vec{v} = (3, -4)$; $\vec{w} = (2, -3)$ y $\vec{z} = (4, -6)$ realiza estas operaciones.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $\vec{w} \cdot \vec{z}$** **c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (3, -4) = 3 - 8 = -5$

b) $\vec{w} \cdot \vec{z} = (2, -3) \cdot (4, -6) = 8 + 18 = 26$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = [(1, 2) + (3, -4)] \cdot (2, -3) = (4, -2) \cdot (2, -3) = 8 + 6 = 14$

8.10 Los módulos de dos vectores son 6 y 10. Halla el producto escalar de ambos vectores si el ángulo que forman es de 60°.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 6 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

8.11 Calcula el módulo de estos vectores.

a) $\vec{a} = (3, -1)$

b) $\vec{b} = (-2, -7)$

c) $\vec{c} = (-4, 5)$

d) $\vec{d} = (6, 0)$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$

c) $|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

c) $|\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$

8.12 Halla el módulo del vector de origen $A(1, 1)$ y de extremo $B(5, 4)$.

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 4 - 1) = (4, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

8.13 Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j}$, calcula:

a) $\vec{u}$

b) $\vec{v}$

c) Ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

c) Ángulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(2, 3) \cdot (1, 5)}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{2 + 15}{13\sqrt{2}} = \dfrac{17}{13\sqrt{2}} = \dfrac{17\sqrt{2}}{26}$

8.14 ¿Qué ángulo forman dos vectores opuestos? ¿Qué ángulo forman dos vectores equipolentes? Razona tu respuesta con un dibujo.

Dos vectores opuestos forman un ángulo de 180°.

Dos vectores equipolentes forman un ángulo de 0°.

8.15 Dados los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (12, 5)$, halla el ángulo que forman estas parejas.

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **b) $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$** **c) $-\vec{u}$ y $\vec{v}$** **d) $\vec{u}$ y $-\vec{v}$**

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(4, 3) \cdot (12, 5)}{\sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{48 + 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{63}{65};$

ángulo $(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcos}\dfrac{63}{65} = 14°\ 15'$

b) $\cos(-\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{(-4, -3) \cdot (-12, -5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{48 + 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{63}{65};$

ángulo $(-\vec{u}, -\vec{v}) = \text{arcos}\ \dfrac{63}{65} = 14°\ 15'$

c) $\cos(-\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{(-4, -3) \cdot (12, 5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{-48 - 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{-63}{65};$

ángulo $(-\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcos} = \dfrac{-63}{65} = 165°\ 45'$

d) $\cos(\vec{u}, -\vec{v}) = \dfrac{(4, 3) \cdot (-12, -5)}{\sqrt{4^2 + 3^2}\sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{-48 - 15}{5 \cdot 13} = \dfrac{-63}{65};$

ángulo $(\vec{u}, -\vec{v}) = \text{arcos}\ -\dfrac{63}{54} = 165°\ 45'$

8.16 Los vértices de un triángulo son $A(1, 2)$; $B(6, 2)$, y $C(4, 6)$. Calcula las longitudes de sus lados.

$l_1 = d(A, B) = \sqrt{(6 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$ u.l.

$l_2 = d(B, C) = \sqrt{(4 - 6)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u.l.

$l_3 = d(C, A) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ u.l.

8.17 Dado el punto $A(3, 2)$, halla las coordenadas de otro punto B sabiendo que se encuentra en el eje de ordenadas y que dista 5 unidades de A.

B será de la forma $(0, y)$.

$5 = d(A, B) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{9 + (2 - y)^2} \Rightarrow 25 = 9 + (2 - y)^2 \Rightarrow 25 = 9 + 4 - 4y + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \dfrac{4 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array} \right.$

Hay dos soluciones: $B(0, 6)$ ó $B(0, -2)$.

8.18 Las coordenadas del punto medio del segmento AB son $(3, 5)$. Halla las del punto B siendo $A(2, 9)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{2 + a}{2}, \frac{9 + b}{2}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6 = 2 + a \\ 10 + 9 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 1 \end{array} \Rightarrow B(4, 1)$$

8.19 Sean $A(2, 3)$ y $B(-8, 7)$ dos puntos del plano. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB.

$$M = \left(\frac{2 - 8}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) = (-3, 5)$$

8.20 Halla la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $A(-2, 4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 4) + t(3, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \end{array}\right\}$

8.21 Determina todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 5)$ y lleva la dirección $\vec{v} = (4, 1)$.

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 5) + t(4, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 4t \\ y = 5 + t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x + 2}{4} = \dfrac{y - 5}{1}$

$x + 2 = 4y - 20 \Rightarrow x - 4y + 22 = 0$; ecuación general

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = \dfrac{1}{4}(x + 2)$

$y - 5 = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{2}$; ecuación explícita

8.22 Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(2, 8)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 9)$.

Ecuación punto-pendiente: $y - 8 = -9(x - 2)$

$y - 8 = -9x + 18 \Rightarrow y = -9x + 26$; ecuación explícita.

8.23 Indica un punto y un vector de estas rectas.

a) $(x, y) = (2, 4) + t(5, -3)$

b) $\dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{y + 2}{2}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = -1 + 9t \\ y = -8 - 6t \end{array}\right\}$

d) $2x - 3y + 8 = 0$

a) $P(2, 4)$ $\vec{v}(5, -3)$
b) $P(3, -2)$ $\vec{v}(3, 2)$
c) $P(-1, -8)$ $\vec{v}(9, -6)$
d) $P(-4, 0)$ $\vec{v}(3, 2)$

8.24 Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como pendiente $m = -7$.

Ecuación punto-pendiente: $y = -7x$
Ecuación explícita: $y = -7x$
Ecuación vectorial: $(x, y) = t(1, -7)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -7t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-7}$

Ecuación general: $7x + y = 0$

8.25 Halla la ecuación en forma continua de la recta que pasa por los puntos $P(-4, 0)$ y $Q(0, 2)$.

$\vec{PQ}(4, 2)$; ecuación continua: $\dfrac{x + 4}{4} = \dfrac{y}{2}$

8.26 Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(3,\ 0)$ y $Q(0,\ -3)$.

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{-3} = 1$

$\overrightarrow{PQ}(-3,\ -3)$; ecuación continua: $\dfrac{x - 3}{-3} = \dfrac{y}{-3}$

Ecuación vectorial: $(x,\ y) = (3,\ 0) + t(-3,\ -3)$

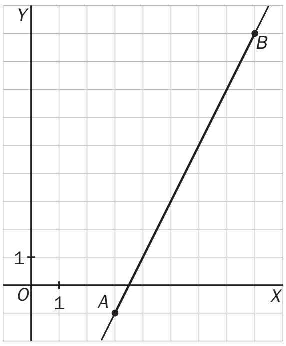
Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x = 3 - 3t \\ y = -3t \end{array}\right\}$

Ecuación general: $x - y - 3 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y = x - 3$

Ecuación explícita: $y = x - 3$

8.27 Representa gráficamente la recta que pasa por los puntos $A(3,\ -1)$ y $B(8,\ 9)$, y halla todas las formas de su ecuación.



$\overrightarrow{AB}(5,\ 10)$. Ecuación continua: $\dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y + 1}{10}$

Ecuación vectorial: $(x,\ y) = (3,\ -1) + t(5,\ 10)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 10t \end{array}\right\}$ $\quad 10x - 30 = 5y + 5$

Ecuación general: $10x - 5y - 35 = 0$; $2x - y - 7 = 0$

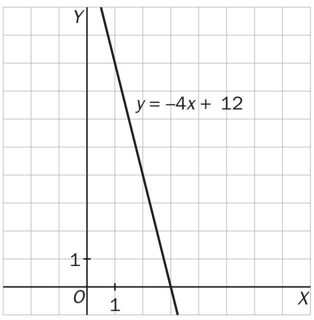
Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = 2(x - 3)$

Ecuación explícita: $y = 2x - 7$

Puntos de corte con los ejes: (3,5; 0) (0, −7)

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{3{,}5} + \dfrac{y}{-7} = 1$

8.28 Representa la recta de ecuación $y = -4x + 12$, y halla las restantes formas de su ecuación.



Ecuación explícita: $y = -4x + 12$

Ecuación vectorial: $(x,\ y) = (0,\ 12) + t(1,\ -4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x = t \\ y = 12 - 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 12}{-4}$

Ecuación general: $4x + y - 12 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y - 12 = -4x$

Puntos de corte con los ejes: (3, 0) (0, 12)

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{12} = 1$

8.29 Dadas la recta r, determinada por los puntos $A(2,\ 3)$ y $B(4,\ 7)$, y la recta s, determinada por los puntos $C(2,\ 7)$ y $D(7,\ 8)$, razona si r y s son paralelas o secantes.

$\overrightarrow{AB}(2,\ 4)$. Ecuación continua: $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 3}{4} \Rightarrow 4x - 8 = 2y - 6 \Rightarrow$ ecuación general: $4x - 2y - 2 = 0$

$\overrightarrow{CD}(5,\ 1)$. Ecuación continua: $\dfrac{x - 2}{5} = \dfrac{y - 7}{1} \Rightarrow x - 2 = 5y - 35 \Rightarrow$ ecuación general: $x - 5y + 33 = 0$

$$\frac{4}{1} \neq \frac{-2}{-5} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes.}$$

8.30 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,\ 2)$ y es paralela a la recta de ecuación $5x + 3y + 7 = 0$.

Si son paralelas, sus pendientes coincidirán: $m = -\dfrac{5}{3}$; además conocemos un punto de la recta.

$$y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 1)$$

8.31 Calcula el ángulo obtuso que forman los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ del cuadrilátero anterior.

$A(4, 1)$, $B(1, 5)$, $C(9, 11)$, $D(4 + 8, 6 + 1) = (12, 7)$ $\overrightarrow{AC}(5, 10)$ $\overrightarrow{BD}(11, 2)$

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{(5, 10) \cdot (11, 2)}{\sqrt{5^2 + 10^2}\sqrt{11^2 + 2^2}} = \frac{55 + 20}{125} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{arcos}\,\frac{3}{5} = 53°\ 7'\ 48''$$

Ángulo obtuso $= 180° - 53°\ 7'\ 48'' = 126°\ 52'\ 12''$

8.32 Halla las coordenadas del punto medio M del lado $\overrightarrow{BC}$ del cuadrilátero anterior, y calcula el ángulo agudo formado por los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AM}$.

$M = \left(\frac{1 + 9}{2}, \frac{5 + 11}{2}\right) = (5, 8)$ $\overrightarrow{AC}(5,10)$, $\overrightarrow{AM}(1, 7)$

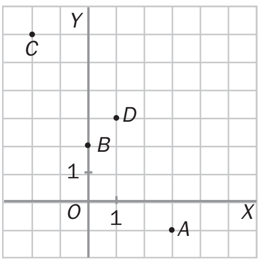
$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = \frac{(5, 10) \cdot (1, 7)}{\sqrt{5^2 + 10^2}\sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{5 + 70}{\sqrt{125}\sqrt{50}} = \frac{75}{25\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \text{Ángulo: } 18°\ 26'\ 6''$$

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Vectores y operaciones

8.33 Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$. ¿Qué relación existe entre ellos?

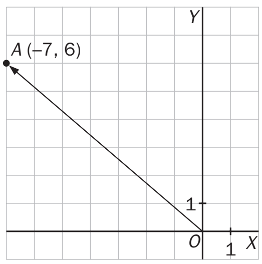


a) $\overrightarrow{AB} = (0, 2) - (3, -1) = (-3, 3)$

b) $\overrightarrow{CD} = (1, 3) - (-2, 6) = (3, -3)$

Los vectores son opuestos.

8.34 Representa el vector de posición del punto $A(-7, 6)$. ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?



Las coordenadas de $\overrightarrow{OA}$ son las mismas que las de A, $(-7, 6)$.

8.35 Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son (5, 3). Siendo $B(-1, 4)$, calcula las coordenadas del punto A.

$$(5, 3) = (-1 - x, 4 - y) \Rightarrow x = -1 - 5 = -6;\ y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow A = (-6, 1)$$

8.36 Opera:

a) $(2, -1) - (4, 3)$
b) $6(-3, 1) + (10, -2)$
c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2)$
d) $4(1, -1) + 2(3, 0)$
e) $(3, -1) - 5(1, -2)$
f) $(9, 6) - 2(4, 1)$

a) $(2, -1) - (4, 3) = (-2, -4)$
b) $6 \cdot (-3, 1) + (10, -2) = (-8, 4)$
c) $2(-4, 0) - 3(-1, 2) = (-5, -6)$
d) $4 \cdot (1, -1) + 2 \cdot (3, 0) = (10, -4)$
e) $(3, -1) - 5(1, -2) = (-2, 9)$
f) $(9, 6) - 2(4, 1) = (1, 4)$

8.37 Dados los vectores $\vec{u} = (5, -3)$; $\vec{v} = (-1, 4)$, y $\vec{w} = (2, 2)$, calcula:

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v})$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u}$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u}$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = (5, -3) - [(-1, 4) + (2, 2)] = (5, -3) - (1, 6) = (4, -9)$

b) $3\vec{u} - 2(\vec{w} - \vec{v}) = 3 \cdot (5, -3) - 2 \cdot [(2, 2) - (-1, 4)] = (15, -9) - 2 \cdot (3, -2) = (9, -5)$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{1}{2}[(-1, 4) - (5, -3)] = \left(-3, \frac{7}{2}\right)$

d) $5\vec{w} - 3\vec{v} + \vec{u} = 5 \cdot (2, 2) - 3 \cdot (-1, 4) + (5, -3) = (10, 10) - (-3, 12) + (5, -3) = (18, -5)$

e) $2(\vec{w} + \vec{v}) - \vec{u} = 2 \cdot [(2, 2) + (-1, 4)] - (5, -3) = 2 \cdot (1, 6) - (5, -3) = (-3, 15)$

f) $\frac{3}{4}\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \frac{3}{4}(5, -3) - 2(-1, 4) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) - (-2, 8) + (2, 2) = \left(\frac{15}{4}, \frac{-9}{4}\right) + (4, -6) = \left(\frac{31}{4}, \frac{-33}{4}\right)$

8.38 Calcula el valor de *x* e *y* en las siguientes igualdades.

a) $(5, -9) = 3(x, y) - 2(x, 0)$

b) $(x, -4) = 2(y, 5) + (3, x)$

c) $(2y, 0) = (x, y) - 2(x, 5)$

d) $(3x, -y) = 2(1, -x) + (y, 9)$

a) $(5, -9) = (3x - 2x, 3y) \Rightarrow 5 = x, -9 = 3y$; $x = 5, y = -3$

b) $(x, -4) = (2y + 3, 10 + x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ -4 = 10 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -14 \\ 2y = -17;\ y = -\frac{17}{2} \end{matrix}$

c) $(2y, 0) = (x - 2x, y - 10) \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x \\ 0 = y - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 10 \\ x = -20 \end{matrix}$

d) $(3x, -y) = (2 + y, -2x + 9) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + y \\ -y = -2x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -7 \\ y = -23 \end{matrix}$

Combinación lineal de vectores

8.39 Considera el vector $\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, siendo $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$. ¿Es $\vec{z}$ combinación lineal de $\vec{i}$ y de $\vec{j}$? ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

$\vec{z} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, es combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

Coordenadas cartesianas $(-4, 3)$

8.40 Sabiendo que $\vec{u} = 2\vec{v} - 3\vec{w}$, expresa:

a) $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

b) $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

b) $\vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u}$

8.41 Estudia si los vectores $\vec{u} = (2, -4)$; $\vec{v} = (3, 1)$, y $\vec{w} = (11, -15)$ son linealmente dependientes.

$$(11, -15) = a(2, -4) + b(3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + 3b \\ -15 = -4a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 = 2a + 3b \\ 45 = 12a - 3b \end{cases}$$

$$56 = 14a \Rightarrow a = 4$$

$b = -15 + 4 \cdot 4 = 1$

Son linealmente dependientes.

8.42 Calcula las coordenadas cartesianas de los vectores $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{v} = 6\vec{a} - 4\vec{b}$ sabiendo que:

$$\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j} \qquad \vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$$

a) $\vec{u} = 2(-3\vec{i} + 6\vec{j}) - (5\vec{i} + 2\vec{j}) = -11\vec{i} + 10\vec{j}$. Sus coordenadas cartesianas son $(-11, 10)$.

b) $\vec{v} = 6(-3\vec{i} + 6\vec{j}) - 4(5\vec{i} + 2\vec{j}) = -38\vec{i} + 28\vec{j}$. Sus coordenadas cartesianas son $(-38, 28)$.

Producto escalar

8.43 Dados los vectores $\vec{u} = (-6, 8)$ y $\vec{v} = (1, 7)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$** **c) $|\vec{u}|$**

a) $(-6, 8) \cdot (1, 7) = -6 + 56 = 50$

b) $(12, -16) \cdot (1, 7) = 12 - 112 = -100$

c) $\sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$

8.44 Estudia si los vectores de las siguientes parejas son perpendiculares entre sí.

a) $\vec{u} = (6, 9)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$

b) $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-8, -4)$

c) $\vec{u} = (-3, 6)$ y $\vec{v} = (10, 5)$

d) $\vec{u} = (-1, -2)$ y $\vec{v} = (4, 2)$

a) $(6, 9) \cdot (-3, 2) = -18 + 18 = 0$. Sí son perpendiculares.

b) $(2, 4) \cdot (-8, -4) = -16 - 16 = -32$. No son perpendiculares.

c) $(-3, 6) \cdot (10, 5) = -30 + 30 = 0$. Sí son perpendiculares.

d) $(-1, -2) \cdot (4, 2) = -4 - 4 = -8$. No son perpendiculares.

8.45 Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso.

a) $\vec{u} = \left(2, \sqrt{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$

b) $\vec{u} = (-6, 10)$ y $\vec{v} = (3, -5)$

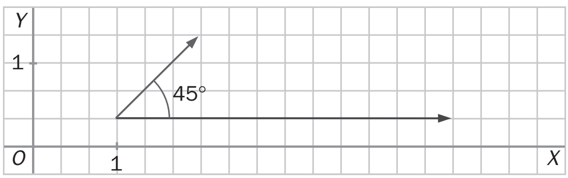
c) $\vec{u} = \left(2, \sqrt{2}\right)$ y $\vec{v} = \left(-2, \sqrt{2}\right)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\left(2, \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3}, 1\right)}{\sqrt{4 + 3} \cdot \sqrt{3 + 1}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha = 10{,}89° = 10°\ 53'\ 36''$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(-6, 10) \cdot (3, -5)}{\sqrt{36 + 100} \cdot \sqrt{9 + 25}} = \dfrac{-68}{\sqrt{4624}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\left(2, \sqrt{2}\right) \cdot \left(-2, \sqrt{2}\right)}{\sqrt{4 + 2} \cdot \sqrt{4 + 2}} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 109{,}47° = 109°\ 28'\ 16''$

8.46 Halla el producto escalar de los vectores de la figura.



$|\vec{u}| = 4$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4\sqrt{2} \cos 45° = 4$

8.47 Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada uno de los siguientes casos.

a) $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}$ **b) $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 8$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 16\sqrt{2}$**

a) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{16\sqrt{2}}{4 \cdot 8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

8.48 Siendo $\vec{u} = (4, x)$, halla el valor de x en cada una de las siguientes situaciones.

a) Si el módulo de $\vec{u}$ mide 20 unidades.

b) Si el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v} = (3, -5)$ es igual a 2.

a) $\sqrt{16 + x^2} = 20 \Rightarrow 16 + x^2 = 400 \Rightarrow x^2 = 384 \Rightarrow x = \sqrt{384} = 8\sqrt{6}$

b) $(4, x) \cdot (3, -5) = 2 \Rightarrow 12 - 5x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{10}{5} = 2$

8.49 Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 5)$ sean perpendiculares.

$$(a, 3) \cdot (-1, 5) = 0 \Rightarrow -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15$$

8.50 Determina un vector cuyo módulo mida $\sqrt{10}$ unidades y que sea perpendicular a $\vec{v} = (6, -2)$.

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \cdot (6, -2) = 0\\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}6x - 2y = 0\\ x^2 + y^2 = 10\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}y = 3x\\ x^2 + (3x)^2 = 10 \rightarrow 10x^2 = 10 \rightarrow x = \pm 1;\ y = \pm 3\end{array}$$

Vectores: (1, 3) (−1, −3)

8.51 Calcula la distancia entre los puntos:
a) $A(4, -2)$ y $B(0, 9)$
b) $C(-1, 10)$ y $D(8, -5)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(0 - 4)^2 + (9 + 2)^2} = \sqrt{137}$

b) $d(C, D) = \sqrt{(8 + 1)^2 + (-5 - 10)^2} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$

8.52 Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(2, 1)$; $B(2, 5)$ y $C(-2, 3)$.

$M_{AB} = \left(\frac{2 + 2}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right) = (2, 3)$ $\quad M_{BC} = \left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) = (0, 4)$ $\quad M_{CA} = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right) = (0, 2)$

Ecuaciones de la recta

8.53 Determina un punto por el que pasan y un vector director de cada una de las siguientes rectas.

a) $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y + 4}{5}$

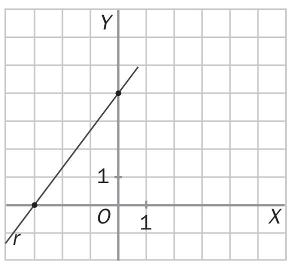
b) $4x - y = 0$

c) $\left.\begin{array}{l}x = 2 - t\\ y = 5 + 3t\end{array}\right\}$

d) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$

a) $A(3, -4)$; $\vec{v} = (-2, 5)$
b) $A(1, 4)$; $\vec{v} = (1, 4)$
c) $A(2, 5)$; $\vec{v} = (-1, 3)$
d) $A(4, 0)$; $\vec{v} = (2, -6)$

8.54 Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} = 1$

Ecuación continua: $\dfrac{x + 3}{3} = \dfrac{y}{4}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 0) + t(3, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l}x = -3 + 3t\\ y = 4t\end{array}\right\}$

Ecuación general: $4x - 3y + 12 = 0$

Ecuación punto-pendiente: $y = \dfrac{4}{3}(x + 3)$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{3}x + 4$

$P(-3, 0)$ $\quad Q(0, 4)$ $\quad \overrightarrow{PQ}(3, 4)$

8.55 Halla la pendiente de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

$$m = -\frac{3}{2}$$

8.56 Escribe la ecuación segmentaria de la recta que pasa por los puntos $A(5, 0)$ y $B(0, 2)$.

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$$

8.57 Expresa en forma continua la recta $y = 2x + 1$.

$$P(0, 1);\ \vec{v} = (1, 2) \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2}$$

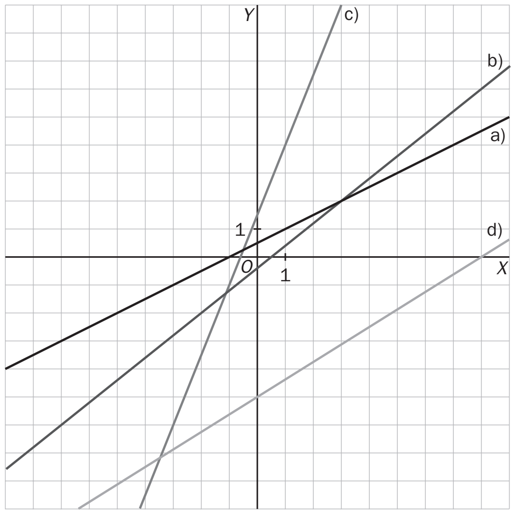
8.58 Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas. Represéntalas gráficamente.

a) $\dfrac{x+1}{2} = y$

b) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4}$

c) $5x - 2y + 3 = 0$

d) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{5} = 1$



a) $A(-1, 0) \qquad \vec{v} = (2, 1) \qquad m = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4} \Rightarrow A(3, 2);\ \vec{v} = (5, -4) \qquad m = \dfrac{-4}{5}$

c) $x = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4$

$\Rightarrow A(1, 4)\ ;\ \vec{v} = (2, 5) \qquad m = \dfrac{5}{2}$

d) $A(0, -5);\ \vec{v} = (8, 5) \qquad m = \dfrac{5}{8}$

Posiciones relativas

8.59 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, si son secantes, halla su punto de corte.

a) r: $2x - 5y + 7 = 0$ $\qquad$ s: $x - 2y - 2 = 0$

b) r: $6x + 4y - 12 = 0$ $\qquad$ s: $3x + 2y - 6 = 0$

c) r: $x - 5y + 3 = 0$ $\qquad$ s: $3x - 15y + 8 = 0$

a) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-5}{-2} \Rightarrow$ Son secantes.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}2x - 5y + 7 = 0\\ x - 2y - 2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2x - 5y + 7 = 0\\ -2x + 4y + 4 = 0\end{array}\right\}\\ \hline \qquad\qquad -y + 11 = 0 \Rightarrow y = 11\\ \qquad\qquad x = 2 \cdot 11 + 2 = 24\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Punto de corte } (24, 11)$$

b) $\dfrac{6}{3} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{-12}{-6} \Rightarrow$ Son coincidentes.

c) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{-15} \neq \dfrac{3}{8} \Rightarrow$ Son paralelas.

8.60 Se consideran las rectas r: $y = x - 3$ y s, determinada por los puntos $A(7, 5)$ y $B(-4, 1)$. ¿Cuál es su posición relativa?

r: $x - y + 3 = 0$

s: $\dfrac{x-7}{-4-7} = \dfrac{y-5}{1-5} \Rightarrow -4x + 28 = -11y + 55 \Rightarrow 4x - 11y + 27 = 0$

$\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{-1}{-11} \Rightarrow$ Son secantes.

8.61 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $A(1, 3)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = 4x + 9$.

$m = 4 \qquad y - 3 = 4 \cdot (x - 1)$

8.62 Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.

$m = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} \qquad y - 4 = \dfrac{1}{2} \cdot (x + 2) \ \Rightarrow\ y = \dfrac{1}{2}x + 5$

8.63 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de *r*: $8x - 5y + 2 = 0$ y *s*: $2x + y - 4 = 0$, y por el punto *A*(0, 3).

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 5y + 2 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4 - 2x$$

$8x - 5 \cdot (4 - 2x) + 2 = 0 \Rightarrow 8x - 20 + 10x + 2 = 0 \Rightarrow 18x = 18 \Rightarrow x = 1; y = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow A(1, 2)$

La recta es $\dfrac{x - 1}{0 - 1} = \dfrac{y - 2}{3 - 2} \Rightarrow \dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 2}{1}$.

8.64 Estudia si las rectas

r: $3x + y - 5 = 0$

s: $2x - y = 0$

t: $x + 4y - 9 = 0$

se cortan en un mismo punto y, en caso afirmativo, calcula sus coordenadas.

Se halla primero el punto de corte de dos de ellas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

El punto de corte de *r* y *s* es (1, 2).

Ahora se comprueba si ese punto pertenece a *t*: $1 + 4 \cdot 2 - 9 = 0$.

Por tanto, las tres rectas se cortan en el mismo punto: (1, 2).

CUESTIONES PARA ACLARARSE

8.65 Siendo *A*(1, 4) y *B*(0, 6), ¿el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{u} = (-1, 2)$?

$\overrightarrow{AB} = (0, 6) - (1, 4) = (-1, 2)$

Sí lo es, porque tienen las mismas coordenadas.

8.66 ¿Son equipolentes dos vectores opuestos? Razona tu respuesta.

No, porque tienen distinto sentido.

8.67 Clasifica las siguientes operaciones según sea su resultado un número o un vector.

a) $k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ b) $k(\vec{u} + \vec{v})$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ d) $k + (\vec{u} \cdot \vec{v})$

a) Número b) Vector c) Número d) Número

8.68 ¿Cuál es el producto escalar de dos vectores de igual módulo y dirección, pero que tienen sentido contrario?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 180° = -|\vec{a}|^2$

8.69 Si el producto escalar de dos vectores de módulo 1 es igual a 1, ¿cómo son su dirección y su sentido?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

Su dirección y su sentido son iguales

8.70 ¿Es posible que el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea igual a 12 si $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 4$? ¿Por qué?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha = 12$ si $\cos\alpha = 1$; es decir, si tienen la misma dirección y sentido.

8.71 a) Razona si es posible determinar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto *A*(0, 6) y que su ordenada en el origen es 6.

b) ¿Y si la recta pasa por el punto *A* y por el origen de coordenadas?

a) No, porque que la ordenada en el origen sea 6 quiere decir que pasa por el punto de primera coordenada 0 y de segunda coordenada 6, que es el punto *A*, y, por tanto, solo se sabe un punto de la recta y, para que quede determinada, se necesita al menos otro.

b) En este caso, sí es posible determinarla, porque se conocen dos puntos por los que pasa.

8.72 Relaciona en tu cuaderno las rectas dadas por las siguientes ecuaciones con los elementos que les corresponden.

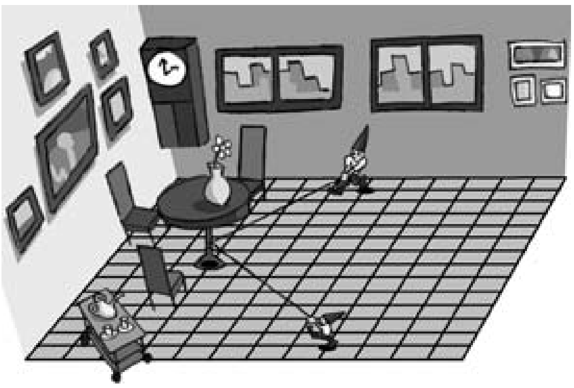
$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4}$	$n = \frac{5}{8}$
$y + 1 = 3x$	$A(7, -2)$
$3x + 8y - 5 = 0$	$\vec{u} = (1, 5)$
$y = 5x + 4$	$m = 3$

8.73 ¿Cuál es la posición relativa de dos rectas
a) que tienen la misma dirección y un punto en común?
b) con distinta dirección?
c) que en su ecuación punto-pendiente tienen la misma pendiente y el punto distinto?

a) Coincidentes.
b) Secantes.
c) Paralelas

PROBLEMAS PARA APLICAR

8.74 Para arrastrar una mesa muy pesada de tablero circular y con una pata en el centro, se atan dos cuerdas y se tira de ellas como muestra la figura.



Si se utilizase una única cuerda para obtener el mismo resultado que con las dos anteriores, ¿qué fuerza debería aplicarse?

La fuerza que se ejerce sobre cada una de las cuerdas tiene el mismo módulo, dirección y sentido que los vectores
$\vec{a} = (3, 6)$ y $\vec{b} = (5, -6)$.

La cuerda se obtendría como resultado de sumar las otras dos.
$\vec{a} + \vec{b} = (3, 6) + (5, -6) = (8, 0) = (8, 0)$

8.75 Una maqueta de un barco de vela es empujada por la corriente del agua de un estanque que ejerce una fuerza $\vec{f}_a = (10, 8)$. A su vez, el viento sopla con una fuerza $\vec{f}_v = (-3, -1)$.
¿En qué dirección y sentido es la fuerza resultante? ¿Cuál es su módulo?

El barco se desplaza según el resultado de sumar a la fuerza de la corriente la del viento: $(10, 8) + (-3, -1) = (7, 7)$

El barco se desplaza en el mismo sentido que la fuerza de la corriente.

Su módulo es: $\sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

8.76 En un radar se observa el vuelo de dos aviones. Uno de ellos se encuentra en el punto de coordenadas (5, 3) y se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{u} = (-4, 7)$. La trayectoria del segundo queda determinada por la recta de ecuación $7x + 4y + 83 = 0$.
Si continuaran su vuelo de forma indefinida, ¿chocarían en algún momento?

Trayectoria del primer avión: $\frac{x-5}{-4} = \frac{y-3}{7} \Rightarrow 7x + 4y - 47 = 0$

Trayectoria del segundo avión: $7x + 4y + 83 = 0$

La posición relativa de los dos es: $\frac{7}{7} = \frac{4}{4} \neq \frac{-47}{83}$

Las trayectorias son paralelas. Por tanto, no chocarían en ningún momento.

8.77 Para regar los árboles de un jardín se van a colocar unas tuberías que comuniquen unos con otros. Si dos de esos árboles están situados en puntos de coordenadas *A*(4, 6) y *B*(9, 8) y otro de ellos en el punto *C*(0, 6), ¿sería posible conseguir que una tubería recta pasase por los tres a la vez?

Recta que une los puntos *A* y *B*: $\frac{x-4}{9-4} = \frac{y-6}{8-6} \Rightarrow \frac{x-4}{5} = \frac{y-6}{2}$

Se comprueba si el punto *C* pertenece a esa recta: $\frac{0-4}{5} = \frac{6-6}{2} \Rightarrow \frac{0-4}{5} \neq \frac{6-6}{2}$

No se podría colocar una tubería recta que pasara por los tres árboles a la vez.

8.78 Un barco lanza un mensaje de socorro. Su posición viene dada por el punto *A*(1460, 765). Dos barcos situados en *B*(3525, 2490) y *C*(585, 3500) acuden en su ayuda.
Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia *A*, ¿cuál llegará primero?

Llegará primero el que esté más cerca de *A*.

$$d(A, B) = \sqrt{(3525 - 1460)^2 + (2490 - 765)^2} = \sqrt{7\,239\,850} = 2690{,}70$$

$$d(A, C) = \sqrt{(585 - 1460)^2 + (3500 - 765)^2} = \sqrt{8\,245\,850} = 2871{,}56$$

Llegará antes el barco que está en la posición *B*.

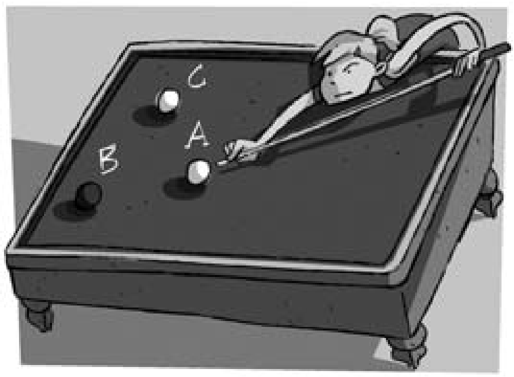
8.79 Con un solo golpe sobre la bola *A*, esta debe golpear primero a la bola *B* y luego a la *C*.
Considerando los lados de la mesa como ejes de coordenadas, las posiciones de las bolas son *A*(20, 28); *B*(5, 10), y *C*(12, 36).
¿Con qué ángulo respecto a la trayectoria seguida por *A* cuando golpea a *B* debe salir la bola para golpear a *C*?

Hay que calcular el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (20, 28) - (5, 10) = (15, 18)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (12, 36) - (5, 10) = (7, 26)$$

$$\cos\alpha = \frac{(15, 18)\cdot(7, 26)}{\sqrt{15^2 + 18^2}\cdot\sqrt{7^2 + 26^2}} = 0{,}9082 \Rightarrow \alpha = 24{,}74°$$



8.80 Una cigüeña tiene su nido situado sobre una torre a 250 metros de altura. Ella está sobre el suelo a 100 metros de distancia de la torre.
a) Si subiera hasta el nido en línea recta, ¿cuál sería la ecuación de la trayectoria seguida? ¿Y cuál la pendiente de la misma?
b) ¿A qué distancia del nido se encuentra la cigüeña?

a) La posición del nido respecto a esos ejes es (0, 250), y la de la cigüeña sobre el suelo, (100, 0).

Ecuación de la trayectoria: $\frac{x}{100} = \frac{y - 250}{-250} \Rightarrow m = \frac{-250}{100} = -\frac{5}{2}$

b) Distancia entre el nido y la cigüeña: $\sqrt{100^2 + 250^2} = \sqrt{72\,500} = 50\sqrt{29}$ m

8.81 Un rayo de luz incide en un espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos *A*(3, 2) y *B*(5, 7), siendo este último el punto de contacto con el espejo.
Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $-\frac{2}{5}$.
a) Escribe la ecuación de las rectas determinadas por el rayo incidente y el reflejado.
b) Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.
c) Si el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales, ¿cuánto vale cada uno de ellos en este caso?

a) Incidente: $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-2}{7-2} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{5}$ Reflejada: $y - 7 = -\frac{2}{5}\cdot(x - 5)$

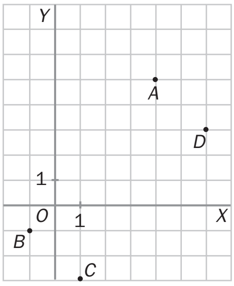
b) Vector director de la recta incidente: (2, 5) Vector director de la recta reflejada: (5, −2)

$$\cos\alpha = \frac{(2, 5)\cdot(5, -2)}{\sqrt{2^2 + 5^2}\cdot\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

c) Como forman un ángulo de 90° entre los dos, cada uno de ellos medirá 45°.

Vectores. Operaciones y producto escalar

8.82 Dados los puntos *A*, *B*, *C* y *D* de la figura, calcula los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?



$A = (4, 5)$; $B = (-1, -1)$; $C = (1, -3)$; $D = (6, 3)$

$\overrightarrow{BA} = (5, 6)$ $\quad \overrightarrow{CD} = (5, 6)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -2)$ $\quad \overrightarrow{AD} = (2, -2)$

Son equipolentes $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$, y también $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

8.83 Calcula:

a) (5, 9) + 2(−4, 8) − (6, 0)
b) 3(−4, 7) − (2, 6) + 5(1, −3)
c) (7, 11) − [(4, 9) + (−3, 1)]
d) (−6, 8) + 3[(5, −2) + (4, 7)]

a) $(5, 9) + 2(-4, 8) - (6, 0) = (5, 9) + (-8, 16) - (6, 0) = (-9, 25)$

b) $3(-4, 7) - (2, 6) + 5(1, -3) = (-12, 21) - (2, 6) + (5, -15) = (-9, 0)$

c) $(7, 11) - [(4, 9) + (-3, 1)] = (7, 11) - (1, 10) = (6, 1)$

d) $(-6, 8) + 3[(5, -2) + (4, 7)] = (-6, 8) + 3 \cdot (9, 5) = (-6, 8) + (27, 15) = (21, 23)$

8.84 Dados los vectores $\vec{u} = (5, 8)$ y $\vec{v} = (-2, 6)$, halla:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{v}$ c) $|\vec{u}|$ d) $|\vec{v}|$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5, 8) \cdot (-2, 6) = -10 + 48 = 38$

b) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-2, 6) \cdot (-2, 6) = 4 + 36 = 40$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

8.85 Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u} = (-2, -4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$ b) $\vec{a} = (3, 9)$ y $\vec{b} = (-1, -3)$

a) $$\cos\alpha = \frac{(-2, -4) \cdot (2, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

b) $$\cos\alpha = \frac{(3, 9) \cdot (-1, -3)}{\sqrt{3^2 + 9^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{-30}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-30}{30} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$$

8.86 ¿Son perpendiculares los vectores $\vec{u} = (6, 15)$ y $\vec{v} = (5, -2)$?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, 15) \cdot (5, -2) = 30 - 30 = 0$$

Son perpendiculares porque su producto escalar es cero.

8.87 Halla la distancia entre los puntos *A*(4, 9) y *B*(−2, 1).

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

8.88 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A(2, −5) y B (4, 1).

$$M = \left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{-5 + 1}{2}\right) = (3, -2)$$

Rectas. Posiciones relativas

8.89 Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas: .

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + 2t \\ y &= 5t \end{aligned}\right\}$$

$A(-1, 0)$; $\vec{v} = (2, 5)$; $m = \dfrac{5}{2}$

8.90 Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, -2)$.

Vectorial: $(x, y) = (3, 1) + t(5, -2)$

Paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = 3 + 5t \\ y = 1 - 2t \end{matrix}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 3}{5} = \dfrac{y - 1}{-2}$

General: $2x + 5y - 11 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = \dfrac{-2}{5} \cdot (x - 3)$

Explícita: $y = \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{11}{5}$

$P\left(0, \dfrac{11}{5}\right)$; $Q\left(\dfrac{11}{2}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{11}{2}} + \dfrac{y}{\frac{11}{5}} = 1$

8.91 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 6)$ y $B(4, 1)$.

$$\frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y - 6}{1 - 6} \Rightarrow 5x + 7y - 27 = 0$$

8.92 Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de estas rectas.
a) $y = 9 - 3x$
b) $5x + 3y - 2 = 0$

a) $-6 = 9 - 3 \cdot 4 \Rightarrow -6 = -3$. No pertenece.
b) $5 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Sí pertenece.

8.93 ¿Son secantes las rectas r: $4x - 5y - 2 = 0$ y s: $y = 2x - 4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

Se escribe la segunda en forma general: $2x - y - 4 = 0$.

$$\frac{4}{2} \neq \frac{-5}{-1}\text{. Por tanto, son secantes.}$$

$$\left.\begin{matrix} 4x - 5y - 2 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x - 5 \cdot (2x - 4) - 2 = 0 \Rightarrow 4x - 10x + 20 - 2 = 0 \Rightarrow -6x = -18 \Rightarrow x = 3;\ y = 2$$

Se cortan en el punto (3, 2).

8.94 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.
a) r: $4x - 6y + 10 = 0$
s: $2x - 3y + 4 = 0$
b) r: $2x + 3y + 6 = 0$
s: $6x + 9y + 18 = 0$

a) $\dfrac{4}{2} = \dfrac{-6}{-3} \neq \dfrac{10}{4}$. Son paralelas.

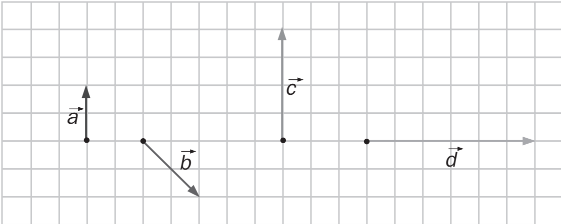
b) $\dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{6}{18}$. Son coincidentes.

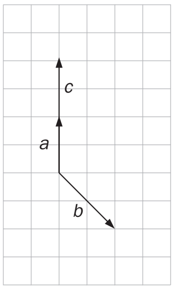
8.95 Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P(0, 2)$ y tiene la misma pendiente que $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y + 2}{3}$.
¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas?

$$m = \frac{3}{-1} = -3 \qquad\qquad y - 2 = -3 \cdot (x - 0)$$

Las rectas son paralelas.

8.96 Expresa los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.





Primero se sitúan los 3 vectores con origen en el mismo punto.

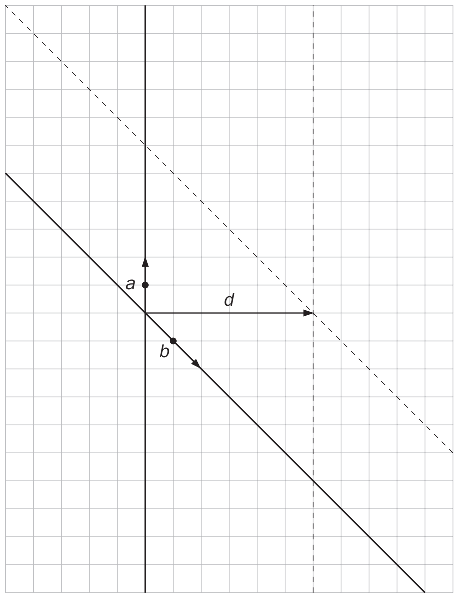
Se observa que el vector $\vec{c}$ es el doble de $\vec{a}$.

Por tanto, la combinación lineal es $\vec{c} = 2\vec{a} + 0\vec{b}$.

Se trazan las rectas que tienen la dirección de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Desde el extremo de $\vec{d}$ se traza una paralela al vector $\vec{a}$ hasta que corte la recta con la dirección de $\vec{b}$, y se observa que la longitud desde el origen hasta ese punto es $3\vec{b}$.

Desde el extremo de $\vec{d}$ se traza una paralela al vector $\vec{b}$ hasta que corte la recta con la dirección de $\vec{a}$, y se observa que la longitud desde el origen hasta ese punto es $3\vec{a}$. Por tanto, $\vec{d} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

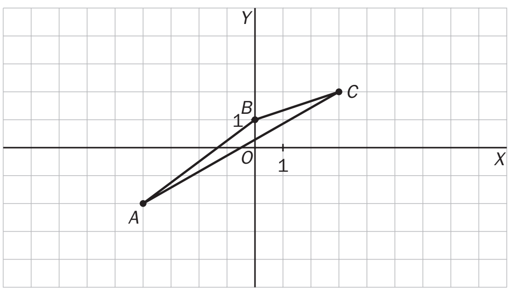


8.97 Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (a, 1)$ formen un ángulo de 45°.

$$\cos 45° = \frac{(4, 3) \cdot (a, 1)}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a + 3}{5\sqrt{a^2 + 1}} \Rightarrow 8a + 6 = 5\sqrt{2a^2 + 2} \Rightarrow 64a^2 + 96a + 36 = 50a^2 + 50$$

$$14a^2 + 96a - 14 = 0;\ 7a^2 + 48a - 7 = 0 \qquad a = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-7)}}{14} = \frac{-48 \pm 50}{14} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{7} \\ a = -7 \end{cases}$$

8.98 Determina, mediante vectores, si es rectángulo el triángulo de vértices $A(-4, -2)$; $B(0, 1)$, y $C(3, 2)$.



Un dibujo ayuda a ver si existe algún ángulo recto.

Se observa que no, pero se comprueba analíticamente hallando primero los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$, y comprobando si son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} = (4, 3)$; $\overrightarrow{BC} = (3, 1)$; $\overrightarrow{AC} = (7, 4)$

Para que sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 + 3 = 15$. No son perpendiculares.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28 + 12 = 40$. No son perpendiculares.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 21 + 4 = 25$. No son perpendiculares.

Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

8.99 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30º con el eje de abscisas.

$$m = \text{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow \sqrt{3}x - 3y - \left(12 + 5\sqrt{3}\right) = 0$$

8.100 Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto en el que $6x + 9y - 12 = 0$ corta al eje de abscisas y es paralela a $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

El punto de corte con el eje de abscisas tiene la segunda coordenada igual a cero.
Entonces, si $y = 0$, $6x + 9 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
La recta pedida pasa por el punto (2, 0).
La pendiente debe ser igual que la de $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$. La recta es $y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2)$.

8.101 Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas de ecuaciones $3x - y - 6 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0$.
a) Halla sus vértices.
b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.
c) Halla las ecuaciones de las rectas determinadas por sus medianas.

a) Para calcular sus vértices se resuelven los sistemas formados por las rectas dos a dos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Los vértices son $A(4, 6)$, $B(2, 0)$ y $C(6, 0)$.

b) $d(A, B) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$
$d(A, C) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40}$
$d(C, B) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$
Es un triángulo isósceles porque tiene dos lados iguales y uno desigual.

c) $M_{AB} = \left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{6 + 0}{2}\right) = (3, 3)$ $\quad M_{BC} = \left(\frac{2 + 6}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = (4, 0)$ $\quad M_{CA} = \left(\frac{6 + 4}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = (5, 3)$

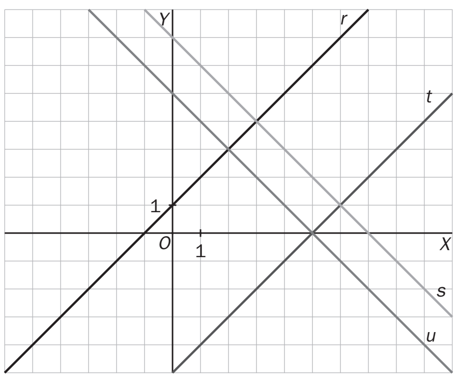
$$\frac{x - 3}{6 - 3} = \frac{y - 3}{0 - 3} \Rightarrow \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 3}{-3} \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

$$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

$$\frac{x - 4}{4 - 4} = \frac{y}{6 - 0} \Rightarrow 6x - 24 = 0 - x = 4$$

8.102 Las rectas r: $x - y + 1 = 0$, s: $x + y - 7 = 0$, t: $x - y - 5 = 0$ y u: $x + y - 5 = 0$ forman un cuadrilátero.
a) Calcula la medida de sus lados y de sus ángulos interiores.
b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

a) Al dibujar las rectas se observa cuáles son los puntos de corte de cada dos de ellas que hay que obtener para calcular los vértices pedidos.



Hay que resolver los sistemas formados por las rectas r y s, obteniéndose el punto $A(3, 4)$; s y t, calculando el punto $B(6, 1)$; t y u, obteniendo el punto $C(5, 0)$, y r y u, con el punto $D(2, 3)$.

$d(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{18}$
$d(B, C) = \sqrt{(5 - 6)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$
$d(C, D) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{18}$
$d(A, D) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$
$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -3)$
$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -1)$
$\overrightarrow{CD} = D - C = (-3, 3)$
$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1, -1)$

Como en el dibujo parece un rectángulo, los ángulos interiores deben ser de 90°. Se calcula el producto escalar de los vectores para comprobar si es cero.

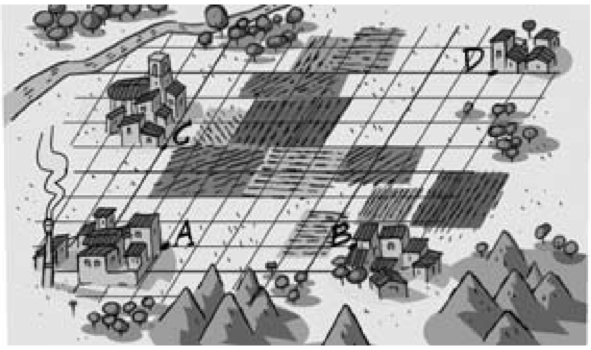
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \qquad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Por tanto, todos los ángulos interiores son de 90°.

b) Es un rectángulo porque sus ángulos interiores son rectos, y sus lados, iguales y paralelos dos a dos.

8.103 La piscina pública

En la figura se representa la situación de cuatro localidades vecinas, *A*, *B*, *C* y *D*. Cada lado de la cuadrícula representa 1 kilómetro.



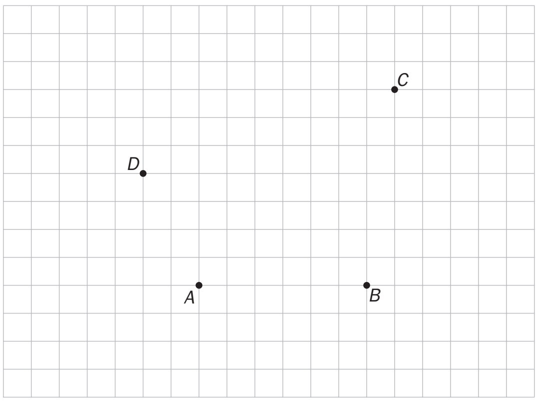
Los correspondientes municipios han decidido construir una piscina pública. Sin embargo, el Consistorio de *D* expone que no dispone de presupuesto para su construcción y se retira del proyecto. Los otros tres ayuntamientos deciden, finalmente, construir la instalación deportiva en un lugar que equidiste de sus tres localidades y sufragando los gastos de forma proporcional a su número de habitantes.

a) Elige una referencia cartesiana situando el origen de coordenadas en el punto *A* y de forma que la abscisa de *B* sea nula. ¿Qué coordenadas tienen los puntos de cada localidad en esa referencia?

b) Sitúa el punto donde debe ser construida la piscina indicando las coordenadas que lo determinan.

c) Calcula la distancia que separa el lugar de la piscina de cada una de las localidades *A*, *B* y *C*, y compárala con la distancia que la separa de *D*.

d) El Ayuntamiento de *C* rechaza este primer acuerdo aduciendo que, al ser su población más numerosa, la piscina debe quedar, como mucho, a 4 kilómetros de su localidad. Los Ayuntamientos de *A* y de *B* aceptan la propuesta siempre y cuando la piscina equidiste de los mismos. Estudia las posibilidades de situar la instalación de acuerdo con las nuevas condiciones.



a) $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(7, 7)$

Mediatriz del segmento AB: $x = 3$

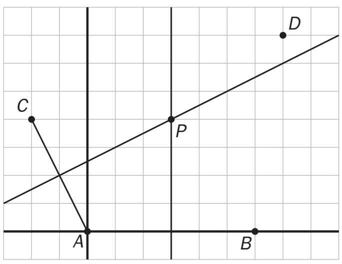
La mediatriz del segmento AC pasa por

$$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1, 2) \text{ y es perpendicular a } (-2, 4).$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

b) Punto que equidista de A, B y C:

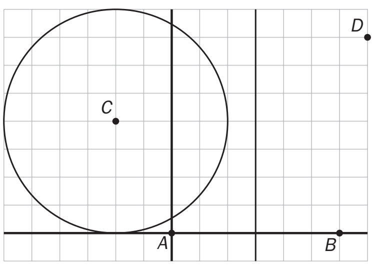
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow P(3, 4)$$



c) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ km

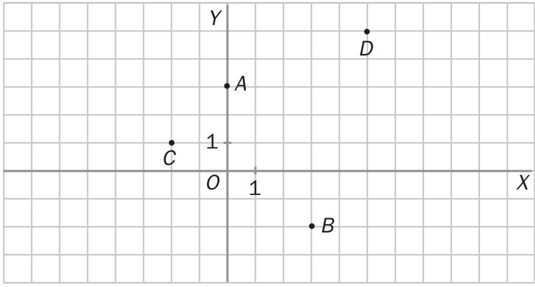
$\overrightarrow{PD} = \sqrt{(3-7)^2 + (4-7)^2} = 5$ km

La piscina dista lo mismo de D que de las otras tres localidades.



d) La instalación debería está situada en algún punto del círculo de centro C y radio 4, y en la mediatriz del segmento AB. Como se aprecia en el dibujo, no existe tal punto.

8.A1 Calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.



$A(0,3)$ $B(8, -3)$ $C(-4, 6)$ $D(5, 5)$

$\overrightarrow{AB}(8, -6)$

$\overrightarrow{CD}(9, -1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82}$

8.A2 Calcula:

a) 3(6, 2) + (5, −4) − 6(2, 1) **b) 5[(7, −2) + (−8, 1)]** **c) (2, 3) − [(6, 1) − 4(−3, −2)]**

a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1) = (18, 6) + (5, -4) - (12, 6) = (11, -4)$

b) $5[(7, -2) + (-8, 1)] = 5(-1, -1) = (-5, -5)$

c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)] = (2, 3) - [(6, 1) + (12, 8)] = (2, 3) - (18, 9) = (-16, -6)$

8.A3 Estudia si son perpendiculares:

a) $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$ **b) $\vec{u} = (-3, 7)$ y $\vec{v} = (2, -1)$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 8) \cdot (4, 1) = -8 + 8 = 0$. Sí son perpendiculares.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, 7) \cdot (2, -1) = -6 - 7 = -13$. No son perpendiculares.

8.A4 Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u} = (-1, 6)$ y $\vec{v} = (3, 1)$ **b) $\vec{u} = (0, -2)$ y $\vec{v} = (0, 2)$**

a) $\cos\alpha = \dfrac{(3, 1) \cdot (-1, 6)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 6^2}} = \dfrac{-3 + 6}{\sqrt{10}\sqrt{37}} = \dfrac{3}{\sqrt{370}} \Rightarrow \alpha = 56{,}79°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{(0, 2) \cdot (0, -2)}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2}} = \dfrac{-4}{4} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

8.A5 Halla la distancia entre los puntos $A(5, -9)$ y $B(7, 2)$.

$$d(A, B) = \sqrt{(7 - 5)^2 + (2 + 9)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

8.A6 Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB siendo $A(4, 0)$ y $B(-2, 6)$.

$$M = \left(\frac{4 - 2}{2}, \frac{0 + 6}{2}\right) = (1, 3)$$

8.A7 Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta:

a) Que pasa por el punto $P(4, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 5)$.

b) Que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.

a) Vectorial: $(x, y) = (4, 1) + t(-2, 5)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 5t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 4}{-2} = \dfrac{y - 1}{5}$

General: $5x + 2y - 22 = 0$

Punto-pendiente: $y - 1 = -\dfrac{5}{2} \cdot (x - 4)$

Explícita: $y = -\dfrac{5}{2}x + 11$ $P(0, 11)$; $Q\left(\dfrac{22}{5}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{22}{5}} + \dfrac{y}{11} = 1$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -3)$ Vectorial: $(x, y) = (9, 4) + t(-1, -3)$

Paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = 9 - t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

Continua: $\dfrac{x - 9}{-1} = \dfrac{y - 4}{-3}$

General: $3x - y - 23 = 0$

Punto-pendiente: $y - 4 = 3 \cdot (x - 9)$

Explícita: $y = 3x - 23$ $P(0, -23)$; $Q\left(\dfrac{23}{3}, 0\right)$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{\frac{23}{3}} + \dfrac{y}{-23} = 1$

8.A8 **Comprueba si la recta $6x + 4y = 0$ pasa por el punto $(3, -3)$.**

$6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \neq 0 \Rightarrow 18 - 12 \neq 0 \Rightarrow$ No pasa por el punto.

8.A9 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene el mismo vector que r: $\left.\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\}$**

Vector (1, 5) $y = 5x$

8.A10 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

a) r: $3x - y + 6 = 0$
s: $3x - 4y + 2 = 0$

b) r: $4x + 6y + 12 = 0$
s: $2x + 3y + 9 = 0$

a) $\frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-4}$. Son secantes.

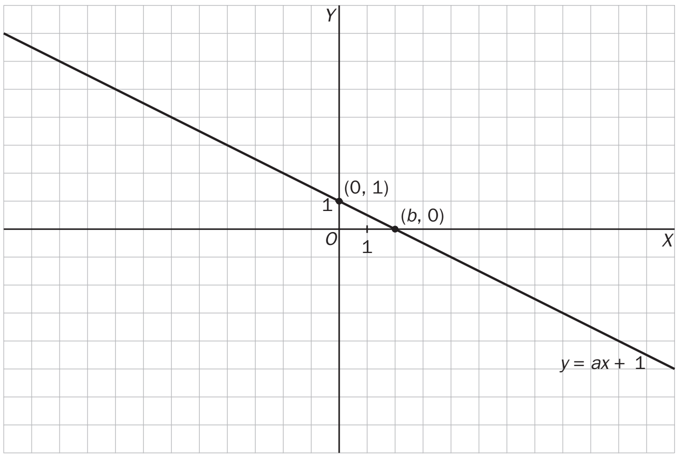
b) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} \neq \frac{12}{9}$. Son paralelas.

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

El área mínima de un triángulo

Todas las rectas de ecuación $y = ax + 1$ forman triángulos con los ejes de coordenadas para diferentes valores de $a(a \neq 0)$. Calcula el valor de a para que el triángulo sea isósceles. ¿Qué valor debe tener para que el área del triángulo sea mínima?



El valor de a podrá ser positivo si la recta es creciente o negativo si es decreciente, y siempre la recta pasará por el punto (0, 1). Analicemos la recta decreciente (la recta creciente será simétrica al eje $x = 0$ y tendrá los mismos resultados), el área será:

$$A = \frac{b \times 1}{2} = \frac{b}{2}$$

El área del triángulo será mínima, cuando b se acerque a cero, luego el área tenderá a cero.

El del triángulo será isósceles cuando $b = 1$ y la recta pase por el punto (1, 0), entonces $a = -1$

También será isósceles si $b = -1$ y la recta pase por el punto (−1 0), entonces $a = 1$