

## EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1 Un triángulo puede definirse dando la medida de sus tres lados. Indica cuáles de las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

a) 5, 6, 7 y 15, 18, 20

b) 4, 6, 8 y 1; 1,5; 2

a)  $\frac{5}{15} = \frac{6}{18} \neq \frac{7}{20} \Rightarrow$  No son semejantes.

b)  $\frac{4}{1} = \frac{6}{1,5} = \frac{8}{2} \Rightarrow$  Son semejantes.

5.2 Razona si son semejantes estas figuras.

a) Dos cuadrados.

b) Tres triángulos equiláteros.

c) Dos rectángulos.

a) Los ángulos de un cuadrado y de otro son todos iguales; además, al ser los cuatro lados iguales, siempre estarán en la misma proporción los de un cuadrado con los del otro.

b) Tres triángulos equiláteros tendrán los tres ángulos iguales de  $60^\circ$ , y como los lados de cada triángulo serán iguales, serán proporcionales los de un triángulo con los del otro.

c) Dos rectángulos, en general, no son semejantes porque los lados no tienen por qué ser proporcionales. Por ejemplo, si en un rectángulo  $b = 1$  cm,  $h = 2$  cm, y en otro,  $b' = 1$  cm,  $h' = 3$  cm, entonces  $\frac{b}{b'} = 1 \neq \frac{h}{h'} = \frac{2}{3}$ .

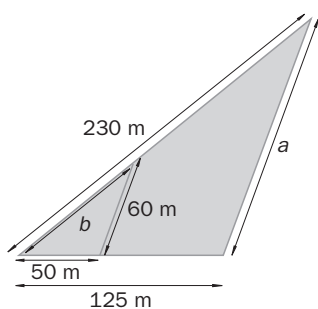
5.3 La escala de un mapa es de 1:2500000. ¿A cuántos kilómetros se encontrarán dos ciudades que en el mapa están separadas 12 centímetros?

Escala 1:2500000. En el mapa, 12 cm representan  $12 \cdot 2500000 = 30000000$  cm = 300 km.

5.4 Un triángulo equilátero tiene 40 centímetros cuadrados de área. Halla el área del triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados.

Obtendremos un triángulo de razón  $k = \frac{1}{2}$ ; por tanto, la razón de las áreas será  $k^2 = \frac{1}{4}$ . El área del nuevo triángulo será  $A = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10$  cm<sup>2</sup>.

5.5 Halla las medidas que faltan en la figura.



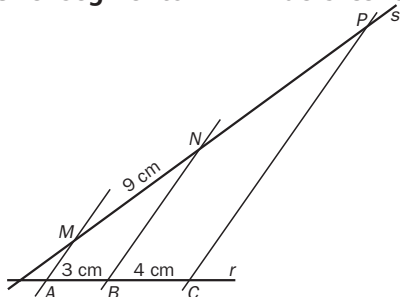
Aplicando el teorema de Tales,

$$\frac{125}{50} = \frac{a}{60} = \frac{230}{b}$$

Entonces,  $a = 150$  m, y  $b = 92$  m

5.6 En una recta  $r$  hay tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  que distan sucesivamente 3 y 4 centímetros. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan a otra,  $s$ , en  $M$ ,  $N$  y  $P$ .

Si el segmento  $MN$  mide 9 centímetros, ¿cuál es la distancia entre los puntos  $N$  y  $P$ ?



$$\frac{3}{9} = \frac{4}{NP}$$

$NP = 12$  cm

5.7 Dibuja un triángulo cualquiera  $ABC$  y construye paso a paso dos triángulos semejantes a él.

a) Uno de razón 1:2

b) Otro de razón 2:1

Partiremos de un triángulo  $ABC$ .

a) Con los mismos ángulos y multiplicando por dos cada uno de sus lados obtenemos un triángulo de razón 1:2.

b) Si, con los mismos ángulos, dividimos los tres lados del triángulo  $ABC$  entre dos, obtenemos un nuevo triángulo de razón 2:1.

5.8 Determina si son semejantes los triángulos que se indican.

a)  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 40^\circ$  y  $\widehat{A}' = 80^\circ$ ,  $\widehat{E} = 60^\circ$

b)  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $b = 6$ ,  $c = 8$  y  $\widehat{A}' = 90^\circ$ ,  $b' = 5$ ,  $c' = 7$

c)  $\widehat{A} = 45^\circ$ ,  $\widehat{B} = 75^\circ$  y  $\widehat{D} = 65^\circ$ ,  $\widehat{E} = 75^\circ$

d)  $a = 5$ ,  $b = 8$ ,  $\widehat{C} = 60^\circ$  y  $a' = 15$ ,  $b' = 24$ ,  $\widehat{C}' = 60^\circ$

a)  $\widehat{C} = 180 - (60 + 40) = 80^\circ$        $\widehat{F} = 180 - (80 + 60) = 40^\circ$

Los dos triángulos tienen todos sus ángulos iguales. Por el criterio 1 sabemos que son semejantes.

b)  $\frac{6}{8} \neq \frac{5}{7}$  no son proporcionales los lados que comprenden al ángulo igual (criterio 3); por tanto, no son semejantes.

c)  $\widehat{C} = 180 - (45 + 75) = 60^\circ$        $\widehat{F} = 180 - (65 + 75) = 40^\circ$

Solo tienen un ángulo igual; por tanto, no son semejantes (criterio 1).

d)  $\frac{5}{15} = \frac{8}{24}$  son proporcionales y el ángulo que abarcan es igual; por tanto, son semejantes (criterio 3).

5.9 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 centímetros. Si la hipotenusa de otro triángulo rectángulo semejante mide 20 centímetros, calcula las longitudes de la hipotenusa del primero y de los catetos del segundo.

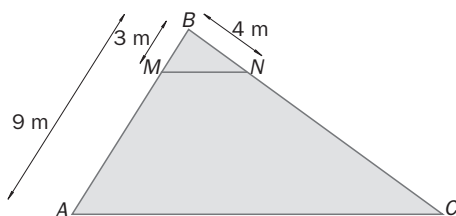
Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa del primero:

$$h^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10 \text{ cm}$$

Como los triángulos son semejantes:

$$\frac{20}{10} = \frac{c_1}{6} = \frac{c_2}{8} \Rightarrow c_1 = 12 \text{ cm, y } c_2 = 16 \text{ cm}$$

5.10 Los lados  $MN$  y  $AC$  son paralelos. Calcula la medida del segmento  $CN$ .

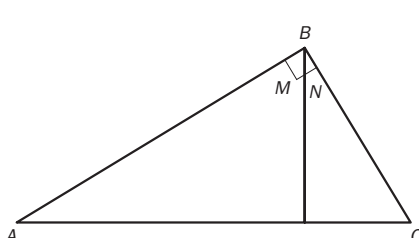


Llamamos  $x$  a la medida del segmento  $CN$ .

Por el teorema de Tales:

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{4 + x} \Rightarrow 4 + x = 12 \Rightarrow x = 8 \text{ m}$$

5.11 En un triángulo rectángulo se traza la altura sobre la hipotenusa. ¿Son semejantes los triángulos en que ha quedado dividido el triángulo dado?



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} + \widehat{N} = 90^\circ \\ \widehat{M} + \widehat{N} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M}$$

Los triángulos tienen un ángulo igual además del ángulo recto; por el criterio 1 deducimos que son semejantes.

- 5.12 Comprueba que la razón de dos alturas correspondientes de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza.

$$A_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} \quad A_2 = \frac{b_2 \cdot h_2}{2}$$

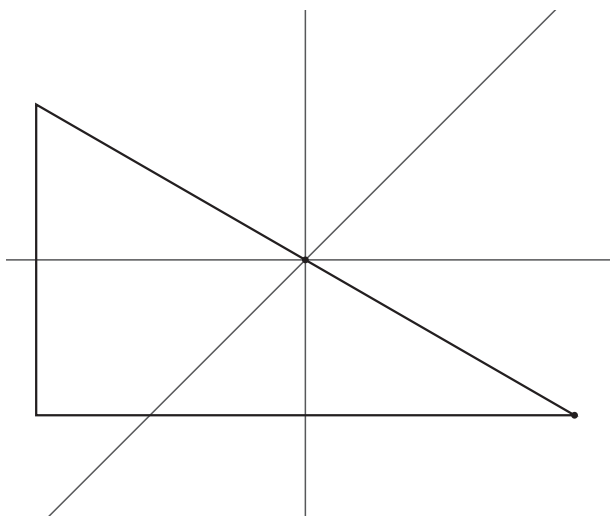
Si la razón de semejanza es  $k$ , la razón entre las áreas será  $k^2$ . Es decir:  $k^2 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{b_1 \cdot h_1}{b_2 \cdot h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = k$

- 5.13 La altura de un triángulo rectángulo mide 7 centímetros y divide a la hipotenusa en dos segmentos  $m$  y  $n$  tales que  $m = \frac{1}{4}n$ . Calcula  $m$  y  $n$ .

$$7^2 = m \cdot n \quad \Rightarrow \quad 49 = \frac{1}{4}n \cdot n \quad \Rightarrow \quad 196 = n^2 \quad \Rightarrow \quad n = 14 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{4} \cdot 14 = 3,5 \text{ cm}$$

#### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

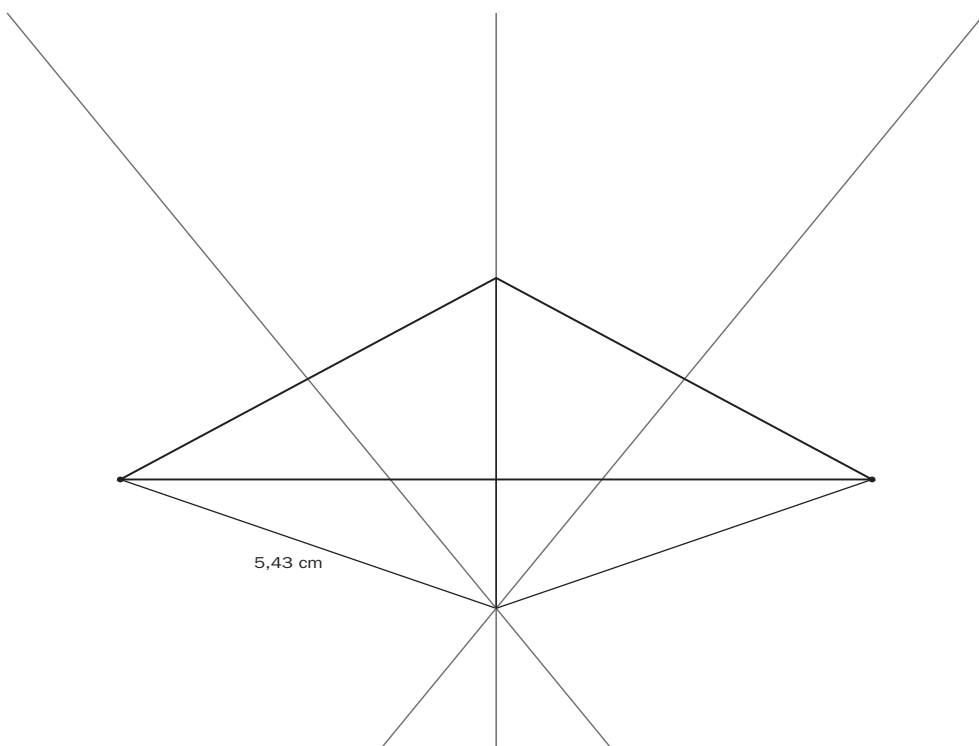
- 5.14 Si en otro caso las distancias entre los pueblos son de 8 kilómetros de  $A$  a  $B$ , de 10 de  $B$  a  $C$  y de 6 de  $A$  a  $C$ , ¿dónde deberá situarse el hospital?



Este ejercicio es algo más sencillo, ya que el triángulo resultante es rectángulo, y el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa. Por tanto, el hospital estará a 5 km de cada pueblo.

- 5.15 ¿Dónde estará ubicado el hospital si las distancias entre los pueblos son de 10 kilómetros de  $A$  a  $B$ , de 6 de  $B$  a  $C$  y de 6 de  $A$  a  $C$ ?

En este caso, el circuncentro queda fuera del triángulo. La distancia a cada pueblo será de 5,43 km.



## ACTIVIDADES

### EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

#### Figuras semejantes

5.16 Calcula el valor de  $a$  y  $b$  para que los siguientes pares de triángulos sean semejantes.

a) 3,  $a$ , 5 y 1,5; 2;  $b$

c) 3,  $a$ , 8 y  $\frac{6}{5}$ ,  $\frac{14}{5}$ ,  $b$

b)  $\frac{5}{2}$ , 3,  $a$  y 10,  $b$ , 24

d)  $45^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $75^\circ$ ,  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$

a)  $\frac{3}{1,5} = \frac{a}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = 4; b = 2,5$

c)  $\frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{a}{\frac{14}{5}} = \frac{8}{b} \Rightarrow a = 7; b = \frac{16}{5}$

b)  $\frac{\frac{5}{2}}{10} = \frac{3}{b} = \frac{a}{24} \Rightarrow a = 6; b = 12$

d)  $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 45^\circ$

5.17 El perímetro de un triángulo equilátero mide 30 centímetros.

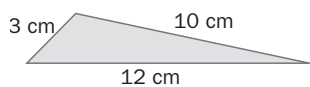
a) Halla las medidas de los lados de un triángulo equilátero semejante a él si la razón de semejanza es  $k = \frac{1}{2}$ .

b) ¿Cuál es la razón de sus áreas?

a) lado = 10 cm  $l' = l \cdot k = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$  cm

b)  $\frac{A'}{A} = k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

5.18 Calcula las longitudes de los lados de un triángulo semejante al de la figura de modo que la razón de sus áreas sea  $\frac{25}{4}$ .



$\frac{A'}{A} = \frac{25}{4} = k^2 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$  es la razón de semejanza. Por tanto:

$a' = a \cdot k = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$  cm

$b' = b \cdot k = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25$  cm

$c' = c \cdot k = 12 \cdot \frac{5}{2} = 30$  cm

5.19 La arista de un cubo mide 8 metros. Halla la medida de la arista de otro cubo semejante a él si la razón de sus volúmenes es  $\frac{1}{27}$ .

$\frac{V'}{V} = \frac{1}{27} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$  es la razón de semejanza. Por tanto:  $a' = a \cdot k = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$  m

5.20 Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles miden 30 centímetros. Calcula el perímetro de un triángulo semejante a él con razón de semejanza  $k = \frac{1}{6}$ .

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide:  $x = \sqrt{1800}$  cm

Por tanto, el perímetro mide  $p = 60 + \sqrt{1800}$  cm

$\frac{p'}{p} = \frac{1}{6} = k \Rightarrow p' = \frac{1}{6} \cdot (60 + \sqrt{1800}) = \frac{60 + \sqrt{1800}}{6} = 10 + 5\sqrt{2}$  cm

- 5.21 Javier se encuentra de vacaciones en Nueva York y dispone de un plano a escala 1:15 000 de la ciudad. Quiere ir desde su hotel a un museo que dista 3,5 centímetros en el plano. ¿Cuál es la distancia, medida en metros, que debe recorrer?

$$15\,000 \cdot 3,5 = 52\,500 \text{ cm} = 525 \text{ m}$$

- 5.22 Se realiza una fotocopia de un mapa, cuya escala es de 1:20 000, ampliándolo al 130%.

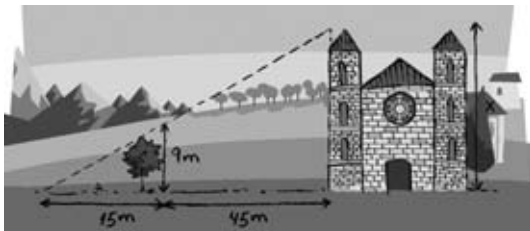
a) Si la distancia entre dos lugares del mapa es de 4,8 centímetros, ¿qué distancia los separa en la fotocopia realizada?

a)  $4,8 \cdot 1,3 = 6,24 \text{ cm}$

b)  $1:20\,000 \Rightarrow 1 \text{ cm} = 20\,000 \text{ cm} = 200 \text{ m}$   
 Distancia real =  $4,8 \cdot 200 = 960 \text{ m}$

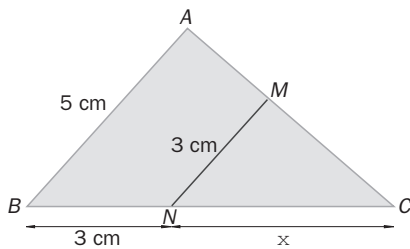
### Teorema de Tales. Criterios de semejanza

- 5.23 Calcula la altura de la torre de la iglesia.



$$\frac{x}{9} = \frac{60}{15} \Rightarrow 15x = 540 \Rightarrow x = 36 \text{ m}$$

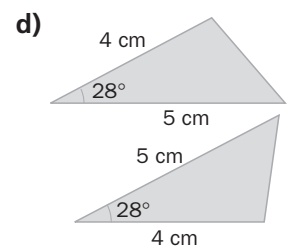
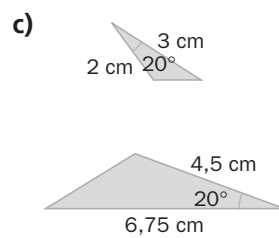
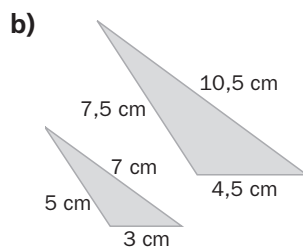
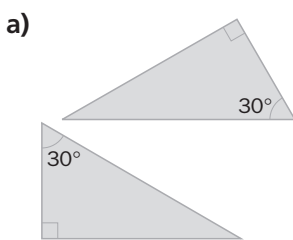
- 5.24 Si los segmentos  $AB$  y  $MN$  son paralelos, halla la medida del lado  $BC$ .



$$\frac{5}{3} = \frac{x+3}{x} \Rightarrow 5x = 3x + 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

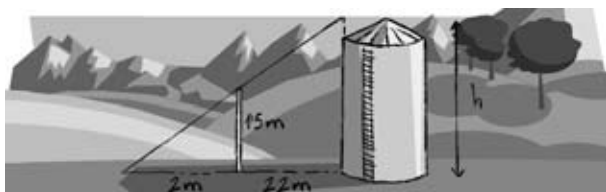
$$BC = 3 + 4,5 = 7,5 \text{ cm}$$

- 5.25 Determina si los siguientes pares de triángulos son semejantes, indicando, en caso afirmativo, el criterio de semejanza utilizado.



- a) Sí, ya que tienen dos ángulos iguales. Criterio 1.  
 b) Sí, ya que tienen sus tres lados proporcionales. Criterio 2.  
 c) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, proporcionales. Criterio 3.  
 d) Sí, ya que tienen un ángulo igual, y los lados correspondientes, iguales. Criterio 3.

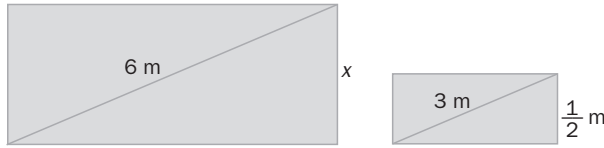
- 5.26 Para saber la altura del silo (depósito de trigo) de un pueblo, se alinea con él un palo y se mide su sombra. Halla la altura del silo.



$$\frac{h}{1,5} = \frac{24}{2} \Rightarrow 2h = 36 \Rightarrow h = 18 \text{ m}$$

## Consecuencias de los criterios de semejanza

5.27 Si los rectángulos son semejantes, ¿cuál es el valor de  $x$ ?



$$\text{Razón} = 6 : 3 = 2$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ m}$$

5.28 Dos triángulos son semejantes. Si el perímetro del primero mide 52 centímetros y la razón de sus áreas es  $\frac{64}{49}$ , ¿cuál es el perímetro del segundo?

$$\frac{A'}{A} = \frac{64}{49} = k^2 \Rightarrow k = \frac{8}{7}$$

$$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = 52 \cdot \frac{8}{7} = \frac{416}{7} \approx 59,43 \text{ cm}$$

5.29 ¿Cuánto mide la altura de un triángulo rectángulo semejante al que tiene catetos de 12 y 16 centímetros si la razón de semejanza es  $k = \frac{2}{3}$ ?

Calculamos la hipotenusa:  $h^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow h = 20$ .

$$A = \frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot \text{altura}}{2} \quad \text{Despejamos la altura sobre la hipotenusa} \Rightarrow \text{Altura} = 9,6 \text{ cm}$$

$$\text{En el triángulo semejante: } \text{Altura}' = \frac{2}{3} \cdot 9,6 = 6,4 \text{ cm}$$

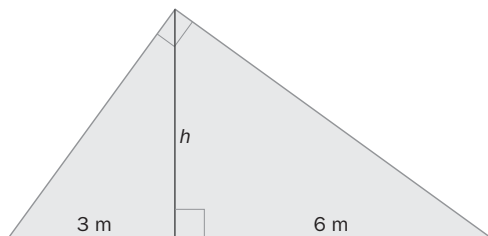
5.30 Se quiere construir dos rascacielos con base en forma de hexágono regular. La arista de la base de uno de ellos mide 2 decámetros. Calcula el área de la base del otro rascacielos sabiendo que la razón de sus perímetros es  $\frac{3}{2}$ .

Para hallar la apotema usamos el teorema de Pitágoras:  $a^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow a = \sqrt{3} \text{ dam}$

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ dam}^2$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{3}{2} = k \Rightarrow \frac{A'}{A} = k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow A' = 6\sqrt{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ dam}^2$$

5.31 En la siguiente figura, ¿cuánto mide  $h$ ?



Teorema de la altura:  $h^2 = m \cdot n$

$$h^2 = 3 \cdot 16 = 18$$

$$h = \sqrt{18} \text{ m} \Rightarrow h = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

5.32 Calcula el área de un triángulo rectángulo en el que la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 8 y 2 centímetros, respectivamente.

Por el teorema de la altura:  $h^2 = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(8 + 2) \cdot 4}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

5.33 Halla las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo de la figura y calcula su área.

Por el teorema de la altura:

$$h^2 = 28 \cdot 7 = 196 \Rightarrow h = \sqrt{196} = 14 \text{ cm}$$

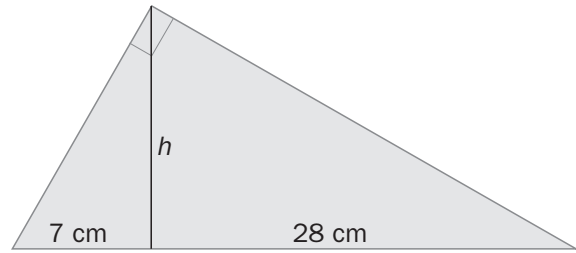
Por el teorema de Pitágoras:

$$14^2 + 7^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{245} = 7\sqrt{5} \text{ cm} = 15,65 \text{ cm}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$14^2 + 28^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{980} = 14\sqrt{5} \text{ cm} = 31,3 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{35 \cdot 14}{2} = 245 \text{ cm}^2$$



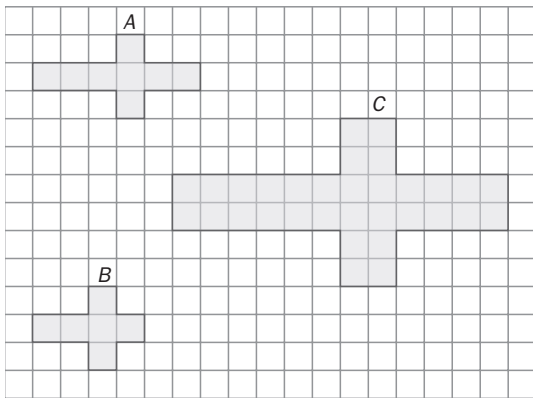
### CUESTIONES PARA ACLARARSE

5.34 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

- Todos los cuadrados son semejantes.
- Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.
- Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.
- Todas las circunferencias son semejantes.
- Los polígonos iguales son semejantes y su razón de semejanza es 1.

- Verdadera (ejercicio 2).
- Falsa. Los ángulos son iguales.
- Verdadera por el criterio 1.
- Verdadera. Siempre están en la misma proporción el radio y el perímetro. El área guarda esa proporción al cuadrado.
- Verdadera, ya que si son polígonos iguales, tienen lados y ángulos respectivamente iguales.

5.35 ¿Cuáles de los polígonos de la figura son semejantes?



A y C son semejantes, ya que todas sus dimensiones son proporcionales.

$$\text{Razón} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$$

5.36 Elige la respuesta correcta.

- Dos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 3. Uno de ellos tiene un área de 6 unidades cuadradas. ¿Cuántas corresponden al área del otro?  
i) 18                      ii) 54                      iii) 108
- Dos prismas son semejantes y la razón de semejanza es 2. Uno de ellos tiene un volumen de 10 unidades cúbicas. ¿Cuántas corresponden al volumen del otro?  
i) 40                      ii) 200                      iii) 80

- Razón de longitudes = 3; razón de áreas = 9  
ii) ya que  $54 \text{ u}^2 = 9 \cdot 6 \text{ u}^2$

- Razón de longitudes = 2; razón de volúmenes = 8  
iii) ya que  $80 \text{ u}^3 = 8 \cdot 10 \text{ u}^3$

5.37 Si dos pentágonos regulares A y B son semejantes, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

- $\frac{\text{Perímetro de A}}{\text{Perímetro de B}} = \frac{\text{Apotema de A}}{\text{Apotema de B}}$
- $\frac{\text{Perímetro de A}}{\text{Perímetro de B}} = \frac{\text{Área de A}}{\text{Área de B}}$
- $\frac{\text{Perímetro de A}}{\text{Perímetro de B}} = \frac{\text{Diagonal de A}}{\text{Diagonal de B}}$

- y c) Ciertas.
- Falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.

- 5.38 Un patio circular tiene 200 metros cuadrados de superficie. Si el radio se triplicara, ¿se triplicaría también la superficie? Razona tu respuesta.

$$\text{Área } A = \pi \cdot r^2 = 200 \text{ m}^2$$

$$\text{Área } B = \pi \cdot (3r)^2 = 9 \cdot \pi \cdot r^2 = 9 \cdot 200 = 1800 \text{ m}^2$$

La superficie no se multiplica por 3, sino por  $3^2$ , que, como ya sabemos, es la razón de las áreas de figuras con razón de semejanza 3.

### PROBLEMAS PARA APLICAR

- 5.39 El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros.

En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

$$\text{Perímetro del hexágono pequeño} = 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36 \text{ cm}$$

$$\text{Razón} = \frac{117}{36} = 3,25$$

Lados del hexágono grande:

$$3 \cdot 3,25 = 9,75 \text{ cm} \quad 4 \cdot 3,25 = 13 \text{ cm}$$

$$5 \cdot 3,25 = 16,25 \text{ cm}$$

$$7 \cdot 3,25 = 22,75 \text{ cm} \quad 8 \cdot 3,25 = 26 \text{ cm}$$

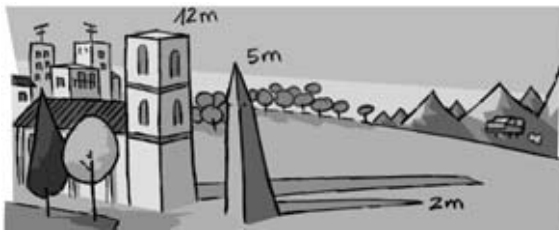
$$9 \cdot 3,25 = 29,25 \text{ cm}$$

- 5.40 En el plano de una vivienda en construcción aparece dibujado un salón rectangular de 13,5 centímetros cuadrados de área. Si la escala del plano es de 1:150, ¿cuál es el área real del salón?

$$\text{Escala } 1:150. \text{ Razón} = 150 : 1 = 150$$

$$\text{Área real} = (150)^2 \cdot 13,5 = 22\,500 \cdot 13,5 = 303\,750 \text{ cm}^2 = 30,375 \text{ m}^2$$

- 5.41 A la misma hora del día, se miden las sombras que proyectan la torre del reloj y el obelisco de una plaza. Halla la altura de la torre del reloj.



Triángulos semejantes  $\rightarrow$  lados proporcionales

$$\text{Razón} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow \text{Altura de la torre} = 6 \cdot \text{altura del obelisco} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ m}$$

- 5.42 Las alturas de Mónica y su madre en una fotografía, cuya escala es de 1:75, son 2,08 y 2,2 centímetros respectivamente.

Si encargan una ampliación que aumenta el tamaño de la fotografía en un 25%, ¿cuánto medirán las dos en ella? ¿Cuál será la escala?

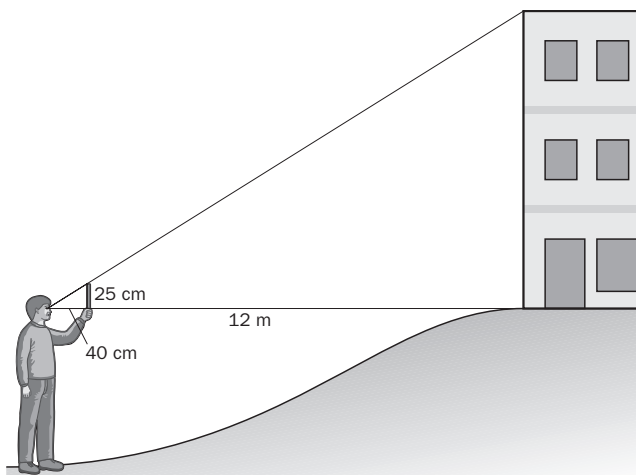
$$\text{Altura de Mónica en la ampliación: } 2,08 \cdot 1,25 = 2,6 \text{ cm}$$

$$\text{Altura de la madre en la ampliación: } 2,2 \cdot 1,25 = 2,75 \text{ cm}$$

$$\text{Escala de la ampliación: } \frac{75}{1,25} = 60 \Rightarrow 1:60$$

- 5.43 Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo.

Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.



Triángulos semejantes  $\Rightarrow$  alturas proporcionales

$$12 \text{ m} = 1200 \text{ cm}$$

$$\text{Razón} = 1200 : 40 = 30$$

$$\text{Altura} = 25 \times 30 = 750 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}$$

$$\text{Altura del edificio} = 7,5 + 1,7 = 9,2 \text{ m}$$



- 5.44 Los servicios de protección contra incendios de una comarca española emiten un informe sobre el número de hectáreas quemadas en el último incendio.

En su mapa de escala 1:60 000, la zona afectada tiene una superficie de 8 decímetros cuadrados. ¿Cuál es el resultado del informe?

$$\text{Razón} = \frac{60\,000}{1} = 60\,000$$

$$\text{Área real} = (60\,000)^2 \cdot 8 = 28\,800\,000\,000 \text{ cm}^2 = 288\,000\,000 \text{ m}^2 = 288 \text{ km}^2$$

- 5.45 Un arquitecto construye una maqueta de un centro de exposiciones cuya planta es un rectángulo de 90 × 50 centímetros y cuyo volumen es de 350 000 centímetros cúbicos.

Si la escala de la maqueta es de 1:150, calcula las dimensiones reales de la planta y el volumen del edificio.

$$\text{Razón} = 150$$

$$\text{Largo de la planta real} = 90 \cdot 150 = 13\,500 \text{ cm} = 135 \text{ m}$$

$$\text{Ancho de la planta real} = 50 \cdot 150 = 7\,500 \text{ cm} = 75 \text{ m}$$

$$\text{Volumen real del edificio} = (150)^3 \cdot 0,35 \text{ m}^3 = 1\,181\,250 \text{ m}^3$$

- 5.46 Un estudiante de la Facultad de Bellas Artes desea trabajar en una figura a escala del *David* de Miguel Ángel cuya altura sea de 60 centímetros.

Si el auténtico *David* mide 4,34 metros de altura y tiene un volumen de 1,2 metros cúbicos, ¿cuál será el volumen de la escultura esculpida por el estudiante?

$$\text{Razón} = \frac{60}{434}$$

$$\text{Volumen de la figura} = \left(\frac{60}{434}\right)^3 \cdot 1,2 = 0,003 \text{ m}^3 = 3 \text{ dm}^3$$

- 5.47 Una tienda de fotografía ofrece varios tamaños, en centímetros, para positivar el negativo de las diapositivas.

$$9 \times 12 \quad 12 \times 15 \quad 14 \times 18 \quad 20 \times 30$$

¿En cuál de ellos se pierde menos contenido de la diapositiva si su tamaño es de 25 × 38 milímetros?

Si las dimensiones de los formatos no son semejantes a las de la diapositiva, siempre se perderá algo de la imagen. El formato que más se asemeje a la razón entre dimensiones será el que más aproveche la imagen.

$$\frac{25}{38} = 0,66$$

$$\frac{9}{12} = 0,75 \quad \frac{12}{15} = 0,8 \quad \frac{14}{18} = 0,78 \quad \frac{20}{30} = 0,67$$

Con lo cual, el formato de 20 × 30 es el que más aprovecha el tamaño de la imagen retratada.

- 5.48 Se quiere construir una cometa utilizando trozos de tela con forma de triángulo rectángulo de colores distintos. Para ello se cortan los triángulos por la altura sobre la hipotenusa, de forma que esta se divide en dos segmentos de 30 y 50 centímetros, respectivamente. ¿Qué área deben tener los triángulos originales?

$$h^2 = 30 \cdot 50 = 1500 \Rightarrow h = \sqrt{1500} = 10\sqrt{15} \Rightarrow A = \frac{(30 + 50) \cdot 10\sqrt{15}}{2} = 400\sqrt{15} \text{ cm}^2$$

- 5.49 Tres amigos están situados en línea recta pegados a la pared de la casa de una amiga que les habla desde una ventana.

Uno de ellos se encuentra bajo la ventana, y los otros dos, a 5 y 3 metros a su izquierda y su derecha, respectivamente.

Si la chica observa a los de los extremos bajo un ángulo de 90°, ¿a qué altura está la ventana desde la que les habla?

$$h^2 = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15} \text{ m es la distancia del amigo de en medio a la ventana.}$$

**Semejanza. Criterios de semejanza**

**5.50** Si la distancia entre dos ciudades es de 650 kilómetros, al medir en un mapa a escala 1:300 000, ¿qué distancia se obtiene?

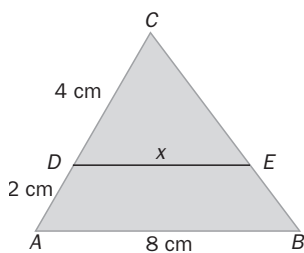
En la realidad: 650 km = 65 000 000 cm

En el mapa: 65 000 000 : 300 000 = 216,67 cm

**5.51** La razón de las áreas de dos hexágonos regulares es  $\frac{49}{36}$ . Si el lado de uno de ellos mide 18 centímetros, ¿cuál es el perímetro del otro?

$$\frac{A'}{A} = k^2 = \frac{49}{36} \Rightarrow k = \frac{7}{6} \Rightarrow l' = l \cdot k = 18 \cdot \frac{7}{6} = 21 \text{ cm} \Rightarrow p' = 21 \cdot 6 = 126 \text{ cm}$$

**5.52** Halla el valor de  $x$  sabiendo que los lados  $AB$  y  $DE$  son paralelos.

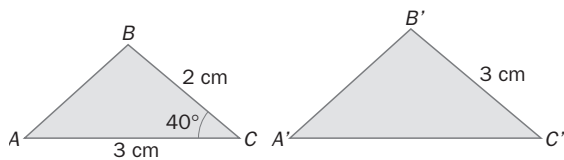


Por Tales sabemos que  $CDE$  y  $CAB$  son semejantes.

$$\text{Razón} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = 8 \Rightarrow x = \frac{16}{3} = 5,33 \text{ cm}$$

**5.53** Considera los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ . ¿Cuánto deben medir el lado  $A'C'$  y el ángulo  $\hat{C}'$  para que sean dos triángulos semejantes? ¿Qué criterio de semejanza utilizas?

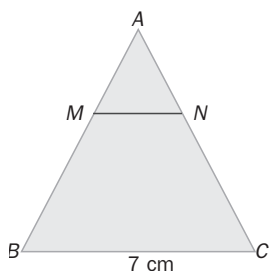


Si queremos que sean semejantes, el ángulo  $\hat{C}'$  debe valer  $40^\circ$  para ser igual al ángulo  $\hat{C}$ , y los lados que forman dichos ángulos deben ser proporcionales:

$$k = \frac{8}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow A'C' = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ cm}$$

**Consecuencias de los criterios de semejanza**

**5.54** Si  $M$  y  $N$  son los puntos medios de los lados  $AB$  y  $AC$ , ¿cuánto mide el segmento  $MN$ ?



$$\text{Por semejanza: } |MN| = \frac{1}{2} |BC| = \frac{1}{2} 7 = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ cm}$$

**5.55** Los perímetros de dos triángulos isósceles son de 15 y 5 centímetros, respectivamente. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Si el lado desigual del primero mide 3 centímetros, ¿cuánto miden los lados del segundo?

$$\frac{p'}{p} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Lado desigual} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \text{ cm}$$

$$\text{Lados iguales} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \text{ cm}$$

- 5.56 Se realiza una fotocopia de un rectángulo de 8 centímetros de base y 6 de altura reduciendo su tamaño en un 25%. ¿Cuánto mide la diagonal del rectángulo fotocopiado?

Por el teorema de Pitágoras:  $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$  cm

Si se reduce un 25%, queda un 75%; entonces,  $k = 0,75$ .

$$d' = d \cdot k = 10 \cdot 0,75 = 7,5 \text{ cm}$$

- 5.57 En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 4 y 16 centímetros, respectivamente. Halla el área de un triángulo semejante a él si la razón de semejanza es  $k = \frac{1}{2}$ .

Por el teorema de la altura:  $h^2 = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$  cm

$$A = \frac{(4 + 16) \cdot 8}{2} = 80 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A'}{A} = k^2 \Rightarrow A' = A \cdot k^2 = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20 \text{ cm}^2$$

### AMPLIACIÓN

- 5.58 Un alumno de 4.º de ESO necesita para la realización de un trabajo una copia reducida de un dibujo rectangular de 35 centímetros de alto y 15 de ancho.

¿Qué porcentaje de reducción tiene que aplicar para incluirlo en un hueco de 20 centímetros de alto?

$$\text{Razón} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} < 0,58 \text{ (se acota superiormente porque tiene que caber en el hueco)}$$

$$\text{Escala} = 58\% \Rightarrow \text{Tiene que reducirlo un } 42\%.$$

- 5.59 El Ayuntamiento de una ciudad tiene previsto construir una torre con las dimensiones del dibujo. Los profesionales que concursan para realizar el proyecto deben presentar una maqueta de 4,9 decímetros cúbicos. Calcula las dimensiones de la misma.



$$\text{Volumen real} = 7 \cdot 5 \cdot 10 + \frac{7 \cdot 5 \cdot 12}{3} = 350 + 140 = 490 \text{ m}^3 = 490\,000 \text{ dm}^3$$

$$\text{Razón} = \sqrt[3]{\frac{4,9}{490\,000}} = \sqrt[3]{0,00001} = 0,02$$

Dimensiones:

$$12 \times 0,02 = 0,24 \text{ m} = 2,4 \text{ dm}$$

$$5 \times 0,02 = 0,1 \text{ m} = 1 \text{ dm}$$

$$7 \times 0,02 = 0,14 \text{ m} = 1,4 \text{ dm}$$

$$10 \times 0,02 = 0,2 \text{ m} = 2 \text{ dm}$$

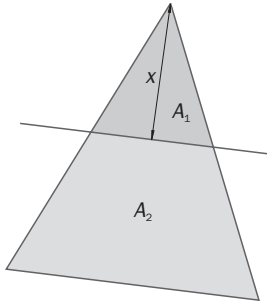
- 5.60 La diagonal de una pista deportiva rectangular mide 13 metros y la razón entre sus lados es 2,4. Existe otra pista semejante con perímetro de 102 metros. ¿Cuánto mide su diagonal?

$$\frac{b}{a} = 2,4 \Rightarrow b = 2,4a$$

$$x + x + 2,4x + 2,4x = 102 \Rightarrow 6,8x = 102 \Rightarrow x = 15 \text{ m} \Rightarrow 2,4x = 36 \text{ m}$$

$$\text{Diagonal} = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39 \text{ m}$$

- 5.61 La altura del triángulo mayor de la figura es de 8 centímetros, y las bases de ambos son paralelas. Calcula el valor de  $x$  para que las áreas  $A_1$  y  $A_2$  sean iguales.



En la figura se generan dos triángulos semejantes. Razón =  $\frac{8}{x} b_2 = \frac{8}{x} b_1$

$$\text{Área del triángulo pequeño} = \frac{b_1 \cdot x}{2}$$

$$\text{Área del triángulo grande} = \frac{b_2 \cdot 8}{2} = 4b_2$$

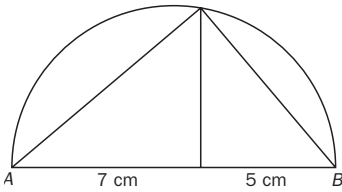
$$\text{Área del trapecio} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2}$$

Área del triángulo pequeño = área del trapecio

$$\frac{b_1 \cdot x}{2} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot (8 - x)}{2} \Rightarrow b_1 \cdot x = \left(b_1 + \frac{8}{x} b_1\right) (8 - x) \Rightarrow x = \left(1 + \frac{8}{x}\right) (8 - x) \Rightarrow x = \frac{(x + 8)(8 - x)}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 64 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

- 5.62 Dibuja un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo cuyos lados miden 5 y 7 centímetros. Utiliza el teorema de la altura.



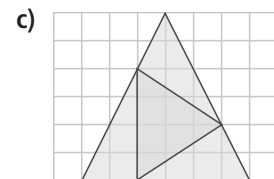
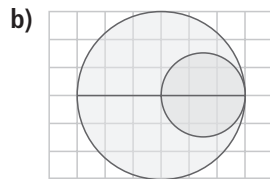
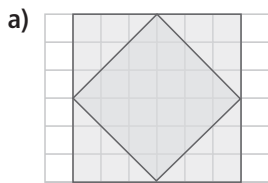
$$A_{\text{rectángulo}} = 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2 \quad A_{\text{cuadrado}} = 35 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{lado} = \sqrt{35} \text{ cm}$$

Para dibujar el lado  $\sqrt{35}$  cm dibujamos un segmento  $AB$  de medida  $5 + 7 = 12$  cm; con centro en el punto medio del segmento trazamos una semicircunferencia de radio 6 cm. A 7 cm de  $A$  trazamos una perpendicular a  $AB$  que se corte con la semicircunferencia. Este nuevo segmento será la altura del triángulo  $ABC$ . Además, por el teorema de la altura sabemos que  $h^2 = 5 \cdot 7$ ;  $h = \sqrt{35}$  cm = lado<sub>cuadrado</sub>. Tomando esa medida con el compás podremos dibujar el cuadrado pedido.

### PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

- 5.63 Figuras semejantes

Determina si la figura interior es semejante a la exterior y calcula, si es posible, la razón de semejanza, la de los perímetros y la de las áreas.



a) Para los cuadrados

El lado del cuadrado menor es:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

La razón entre los perímetros es  $\frac{7}{5}$ .

La razón entre las áreas es  $\frac{49}{25}$ .

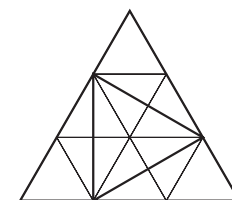
b) Para las circunferencias

La razón entre los perímetros es:

$$\frac{3}{1,5} = 2.$$

La razón entre las áreas es  $2^2 = 4$ .

c) Para los triángulos



La razón entre las áreas es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{18}{6} = 3$$

La razón entre los perímetros será  $\sqrt{3}$ .

5.64 Latas de diseño

Una conocida marca de refrescos ha diseñado una nueva forma de recipientes para su producto estrella. Las capacidades son de  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{2}$  de litro, respectivamente, y el diseño es el mismo para los dos, es decir, las latas son semejantes.

- a) Calcula la altura de la lata grande sabiendo que la de la pequeña es de 12 centímetros.  
 b) Halla la superficie de la base de la lata pequeña sabiendo que la de la grande es de 75 centímetros cuadrados.



La razón de los volúmenes es:  $\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5$

La razón de las medidas lineales será:  $\frac{L'}{L} = \sqrt[3]{1,5} = 1,14$

La razón de las áreas será:  $\frac{A'}{A} = (\sqrt[3]{1,5})^2 = 1,30$

- a) Si la altura de la lata menor es de 12 cm, la de la mayor será  $h' = 12 \cdot 1,14 = 13,68$  cm.  
 b) Si la superficie de la base de la lata mayor es de 75 cm<sup>2</sup>, la de la menor será  $A = \frac{75}{1,3} = 57,69$  cm<sup>2</sup>.

AUTOEVALUACIÓN

5.A1 Indica cuáles de los siguientes pares de triángulos son semejantes y, en ese caso, calcula la razón de semejanza de sus lados.

- a) 3, 4, 5 y 4,5; 6; 7,5 cm  
 b) 2, 5, 6 y 4, 10, 11 cm

- c) 5, 12, 13 y 12,5; 30; 32,5 cm  
 d) 4, 7, 10 y 2,4; 4,2; 6 cm

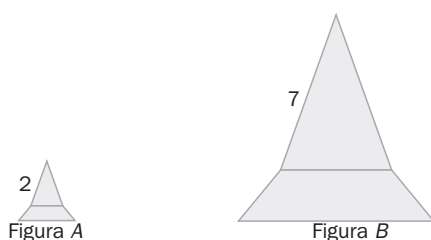
a) Sí  $\Rightarrow k = \frac{3}{2}$

b) No

c) Sí  $\Rightarrow k = \frac{5}{2}$

d) Sí  $\Rightarrow k = \frac{3}{5}$

5.A2 Si ambas figuras son semejantes, calcula el área de A sabiendo que la de B es de 43 unidades cuadradas.



Razón =  $\frac{2}{7}$

$A = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 43 = \frac{4}{49} \cdot 43 = \frac{172}{49} = 3,51 \text{ u}^2$

5.A3 Me han regalado una reproducción de la torre Eiffel a escala 1:4000 que mide 8 centímetros. ¿Cuál es la altura real del monumento?

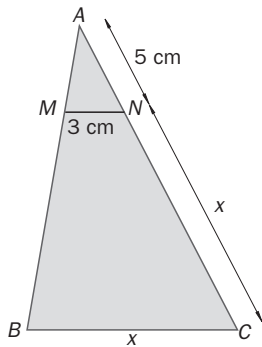
$8 \cdot 4000 = 32000 \text{ cm} = 320 \text{ m}$

5.A4 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 centímetros, respectivamente. Se quiere dibujar otro triángulo rectángulo semejante de modo que el cateto menor mida 6 centímetros. ¿Cuánto debe medir el otro cateto?

Ya que los triángulos están en posición de Tales, son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales:

$k = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow b = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}$

5.A5 Considera los triángulos de la figura.



a) ¿Cómo deben ser los lados  $MN$  y  $BC$  para que los triángulos  $AMN$  y  $ABC$  sean semejantes?

b) Halla el valor de  $x$ .

a) Deben ser paralelos.

b)  $\frac{x+5}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 3 \cdot (x+5) = 5x \Rightarrow 15 = 2x \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}$

5.A6 Calcula el perímetro de un rombo semejante a otro, cuyas diagonales miden 24 y 16 centímetros, si la razón de sus áreas es  $k = \frac{1}{16}$ .

Por el teorema de Pitágoras:

$$12^2 + 8^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \Rightarrow p = 4 \cdot l = 16\sqrt{13} \text{ cm}$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{16} = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{p'}{p} = k \Rightarrow p' = k \cdot p = \frac{1}{4} \cdot 16\sqrt{13} = 4\sqrt{13} \text{ cm}$$

5.A7 En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos que miden 2 y 18 centímetros, respectivamente.

Calcula el área de un triángulo rectángulo semejante con razón de semejanza  $k = \frac{3}{2}$ .

Por el teorema de la altura:

$$h^2 = 18 \cdot 2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

$$h' = h \cdot k = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9 \text{ cm}$$

$$b' = b \cdot k = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{30 \cdot 9}{2} = 135 \text{ cm}^2$$

MURAL DE MATEMÁTICAS

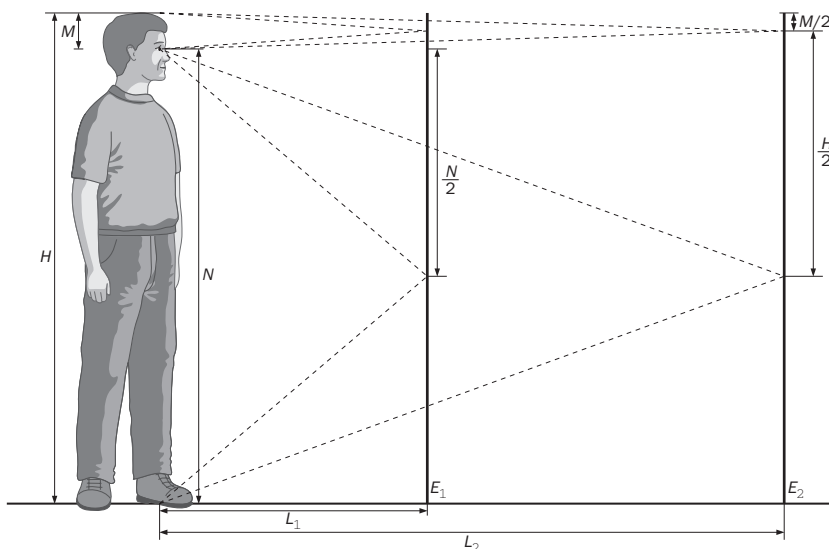
MATETIEMPOS

El espejo

¿Qué dimensiones debe tener un espejo para que puedas verte en él a ti mismo por completo?

Cuando se plantea el problema las primeras ideas que se dan son que depende de la distancia a que esté el espejo o que el mismo tamaño que la persona. Haciendo un análisis más profundo se comprueba que ambas conjeturas son erróneas.

Plantearemos el siguiente gráfico:



Podemos observar que el tamaño del espejo debe ser la mitad de la persona que mira y es independiente de la distancia a la que se lo coloque.