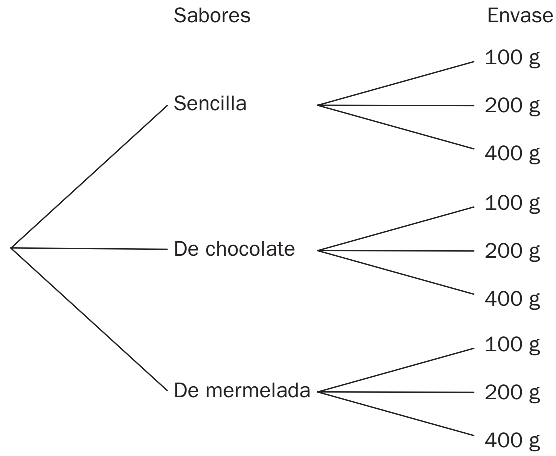
EJERCICIOS PROPUESTOS

16.1 Una pastelería elabora galletas de tres sabores: sencillas, cubiertas de chocolate y rellenas de mermelada, y las envasa en cajas de 100, 200 y 400 gramos. Forma un diagrama en árbol.

¿Cuántos productos diferentes se pueden escoger?

Formamos el diagrama en árbol:

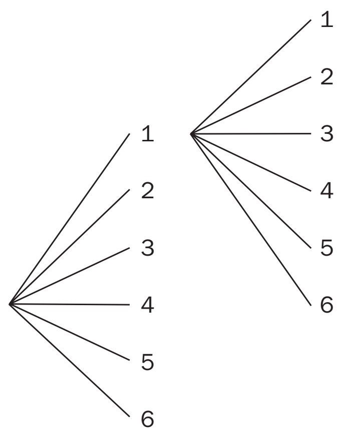


Por tanto, el consumidor puede escoger entre $3 \cdot 3 = 9$ tipos de paquetes de galletas diferentes.

16.2 Se lanzan al aire 2 dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado de las caras superiores. Forma un diagrama en árbol.

¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener? ¿Y si son 3 los dados lanzados?

Formamos el diagrama en árbol:



Por tanto, se pueden obtener $6 \cdot 6 = 36$ resultados diferentes.

Para el caso de tres dados, el número de resultados diferentes que se pueden obtener es: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

16.3 Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números diferentes de seis cifras se pueden formar sin que se repita ninguna?

Se podrán formar $P_6 = 6! = 720$ números diferentes.

16.4 Con las letras de la palabra TEMA, ¿cuántos grupos diferentes de 4 letras puedes escribir sin que se repita ninguna letra? ¿Y si la primera ha de ser la *T*?

Grupos diferentes de cuatro letras: $P_4 = 4! = 24$.

Grupos diferentes cuya primera letra sea la *T*: $P_3 = 3! = 6$.

16.5 En una carrera participan 16 caballos y solo se adjudican 3 premios. Suponiendo que no pueden llegar a la meta al mismo tiempo, ¿de cuántas maneras se pueden conceder los premios?

Como influye el orden, se tiene:

$V_{16,\,3} = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ formas diferentes de adjudicar los premios.

16.6 Una asociación ecologista se constituye con 30 socios fundadores. Si tienen que elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero, ¿de cuántas formas diferentes se pueden cubrir esos cargos?

$V_{30,\,4} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720$ formas diferentes de cubrir los cargos de la junta directiva.

16.7 Se lanzan 2 dados cúbicos de diferentes colores con las caras numeradas del 1 al 6.

¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si son 3 dados?

Si lanzamos dos dados, obtenemos $VR_{6,\,2} = 6^2 = 36$ resultados distintos.

Si lanzamos tres dados, obtenemos $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$ resultados distintos.

16.8 Las matrículas de los coches en España están representadas por 4 números seguidos de 3 letras, tomadas de entre 20 consonantes. ¿Cuántos automóviles se podrán matricular con este sistema?

Formaciones diferentes de los números: $VR_{10,\,4} = 10^4$.

Formaciones diferentes de las letras: $VR_{20,\,3} = 20^3$.

Matrículas diferentes que se pueden formar $= 10^4 \cdot 20^3 = 80\,000\,000$.

16.9 Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ¿cuántos productos distintos se pueden realizar multiplicando 4 de ellos que sean diferentes? ¿Y si multiplicamos 5 diferentes?

Como no influye el orden, resulta:

$C_{9,\,4} = 126$ productos de cuatro cifras diferentes.

$C_{9,\,5} = 126$ productos de cinco cifras diferentes.

16.10 Mediante caminos, 10 aldeas se encuentran comunicadas de forma que hay uno que une entre sí cada par de pueblos.

¿Cuántos caminos diferentes existen?

Existen $C_{10,\,2} = 45$ caminos diferentes.

16.11 Calcula el valor de:

a) $\binom{6}{3}$ **b)** $\binom{7}{7}$ **c)** $\binom{49}{31} + \binom{49}{32}$

a) $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!\ 3!} = 20$ b) $\binom{7}{7} = 1$ c) $\binom{49}{31} + \binom{49}{32} = \binom{50}{32}$

16.12 **Halla el valor de $x(x \neq 6)$ en esta igualdad: $\binom{14}{6} = \binom{14}{x}$**

Por la propiedad 2 de los números combinatorios:

$$\binom{14}{6} = \binom{14}{x} \Rightarrow x + 6 = 14 \Rightarrow x = 8$$

16.13 **Desarrolla estas potencias.**

a) $(a^2 + 2b)^3$

b) $(a^2 + 2b)^5$

a) $(a + 2b)^3 = a^3 + 6\,a^2b + 12\,ab^2 + 8b^3$

b) $(a + 2b)^5 = a^5 + 10\,a^4b + 40\,a^3b^2 + 80\,a^2b^3 + 80\,ab^4 + 32\,b^5$

16.14 **Desarrolla las siguientes potencias.**

a) $(3x - 2y)^4$

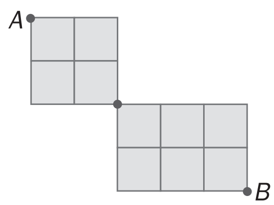
b) $(3x - 2y)^6$

a) $(3x - 2y)^4 = 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$

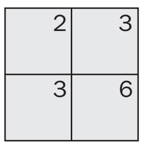
b) $(3x - 2y)^6 = 729x^6 - 2916x^5y + 4860x^4y^2 - 4320x^3y^3 + 2160x^2y^4 - 576xy^5 + 64\,y^6$

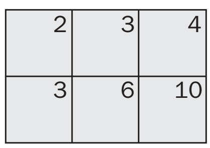
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16.15 **¿Cuántos caminos diferentes llevan de *A* a *B* en la siguiente figura si solo se puede caminar de izquierda a derecha y de arriba abajo?**



Colocamos el número de caminos sobre cada punto del diagrama:





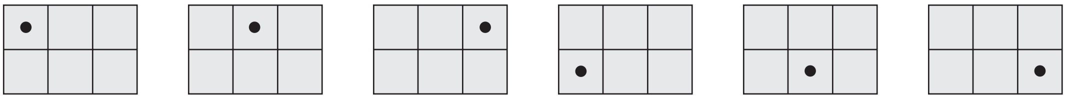
De *A* a *C* hay 60 caminos diferentes. De *C* a *B* hay 20 caminos diferentes.

Por tanto, de *A* a *B* hay $6 \cdot 20 = 120$ caminos diferentes.

16.16 Considera el rectángulo formado por 6 cuadrados de la figura. ¿Cuántas maneras hay en total de colocar sobre él 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 puntos en relieve? (Siempre a lo sumo un punto en cada cuadrado.)

Si no se coloca ningún punto sobre la figura, solo habrá una forma.

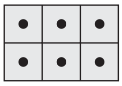
Las formas de colocar un punto pueden ser 6 del siguiente modo:



De lo anterior vemos que:

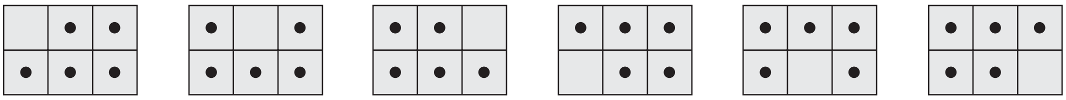
N.º de puntos colocados	Formas posibles
0	$1 = C_{6,\,0}$
1	$6 = C_{6,\,1}$

De forma simétrica a la anterior, por ejemplo, ¿de cuántas formas se pueden colocar 6 puntos? Existe una única forma:



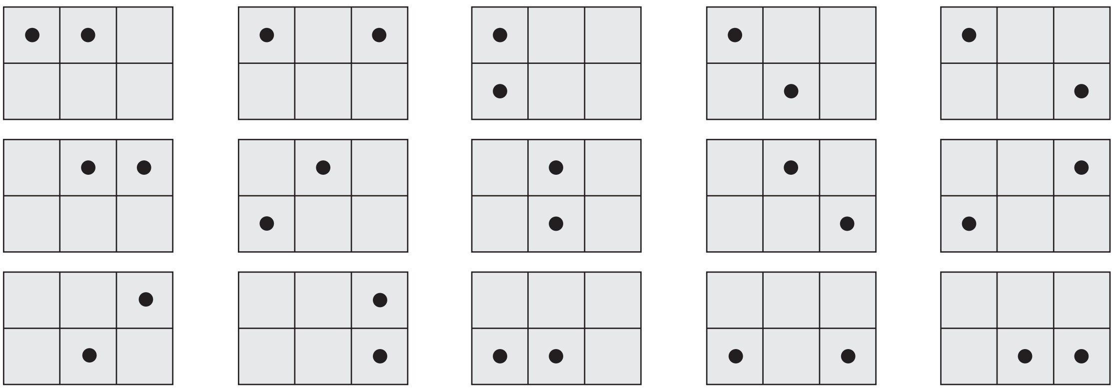
$C_{6,\,6} = 1$

¿Y cinco puntos? Habrá 6 formas del siguiente modo:



Es decir, $C_{6,\,5} = 6$

Así pues, veamos de cuántas formas se pueden colocar 2 puntos en la figura:



Es decir, $15 = C_{6,\,2}$

De forma simétrica, 4 puntos se podrán colocar de $C_{6,\,4} = 15$ formas diferentes.

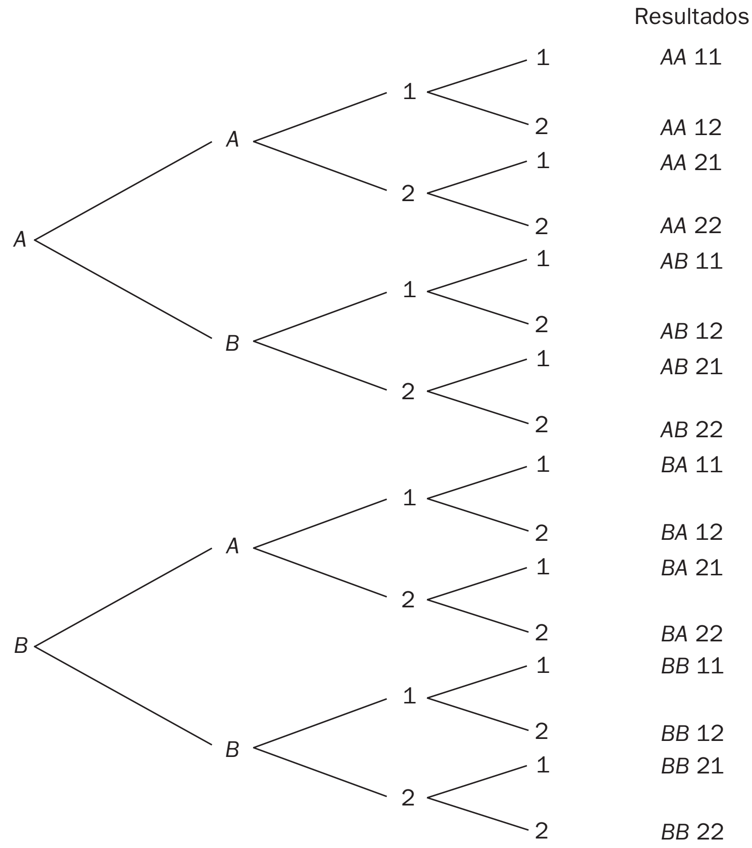
Y por último, 3 puntos se pueden colocar de $C_{6,\,3} = 20$ formas diferentes.

Por tanto, el número total será: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

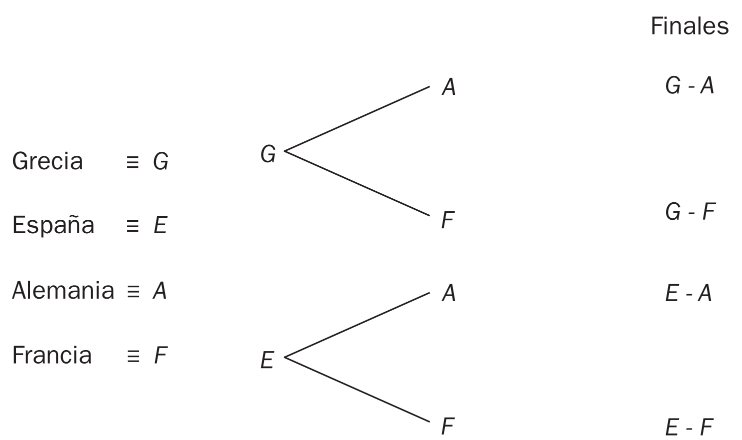
Diagrama en árbol. Recuento

16.17 El código de un candado consta de 2 letras (*A* y *B*) y de 2 números (1 y 2). Realiza el diagrama en árbol y calcula el número de códigos posibles.

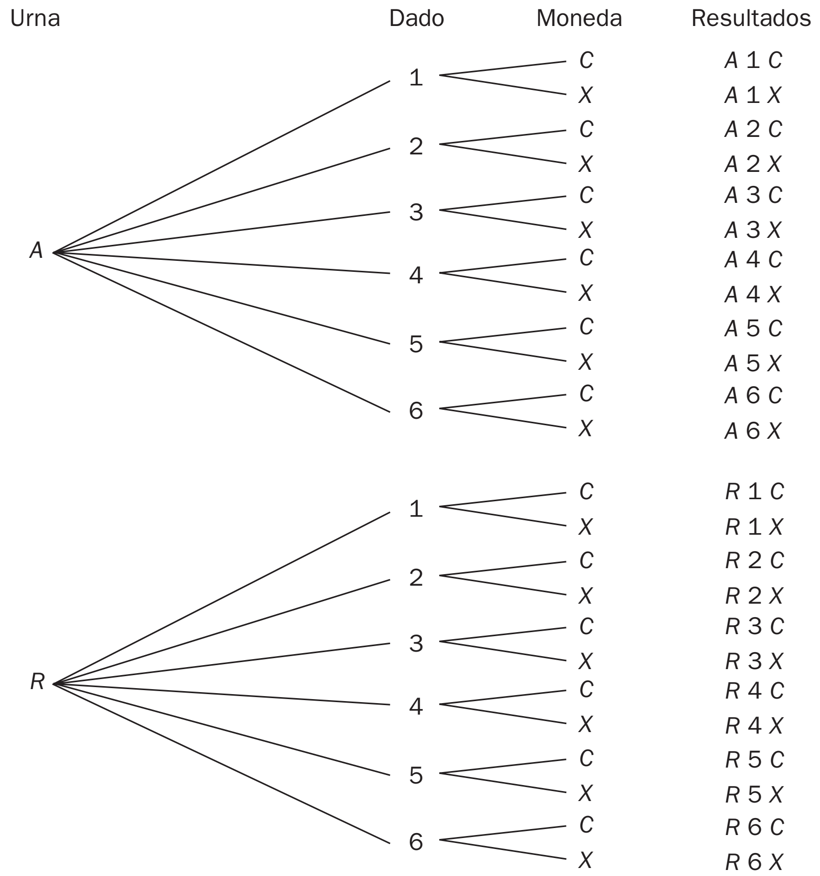


Número de código posibles: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

16.18 Los partidos de semifinales de una competición europea de baloncesto son Grecia-España y Alemania-Francia. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a las posibles finales.



16.19 **Utilizando un diagrama en árbol, calcula el número de resultados posibles al extraer una bola de una urna que contiene una azul y otra roja, y a la vez que se lanza un dado cúbico y una moneda.**

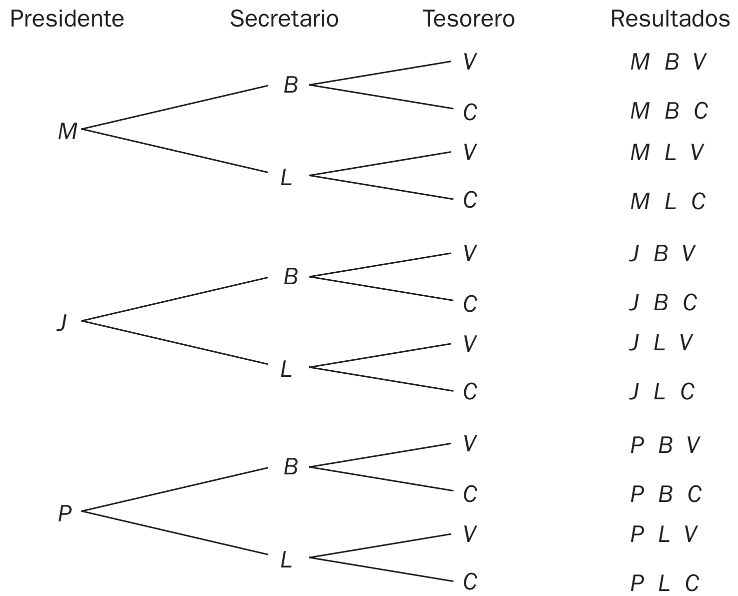


Número de resultados posibles: $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$

16.20 **Una ONG quiere escoger una nueva junta directiva. Al cargo de presidente optan 3 personas: María, Julia y Pedro; al de secretario, 2: Belén y Luis, y al de tesorero, otras 2: Vanesa y Carlos.**

Representa en un diagrama en árbol todas las posibilidades de elección.

María $\equiv M$
Julia $\equiv J$
Pedro $\equiv P$
Belén $\equiv B$
Luis $\equiv L$
Vanesa $\equiv V$
Carlos $\equiv C$



Número de elecciones posibles: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

16.21 Halla el valor de x en estas igualdades.

a) $3V_{x,2} = 10C_{x-1,2}$

b) $5V_{x,3} = V_{x+2,3}$

c) $P_x = 30P_{x-2}$

d) $2C_{x,2} = V_{x,2}$

a) $3 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)!} = \dfrac{10}{2!} \cdot \dfrac{(x-1)!}{(x-3)!} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

b) $5 \cdot \dfrac{x!}{(x-3)!} = \dfrac{(x+2)!}{(x-1)!} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

c) $x! = 30(x-2)! \Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow x = 6$

d) $2 \cdot \dfrac{x!}{2!\,(x-2)!} = \dfrac{x!}{(x-2)!} \Rightarrow 1 = 1$

Es cierta para todo número natural.

16.22 Un chico coloca cada día los libros de texto en su estantería al llegar a casa. En ella dispone los 6 libros que utiliza con mayor frecuencia. ¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?

Número de ordenaciones distintas: $P_6 = 6! = 720$

16.23 Con las letras de la palabra FLAMENCO, ¿cuántos grupos diferentes de 8 letras se pueden formar?

Grupos diferentes de 8 letras: $P_8 = 8! = 40\,320$

16.24 La comida básica de un poblado está basada en el arroz, las judías, el maíz y la patata.

¿Cuántos platos distintos pueden realizar mezclando 3 alimentos a la vez?

Número de platos distintos: $C_{4,3} = \dfrac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

16.25 En un juego de azar se eligen 6 números del 1 al 49, ambos inclusive.

¿Cuántas jugadas distintas pueden efectuarse?

Número de jugadas distintas: $C_{49,6} = \dfrac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\,983\,816$

16.26 En un juego de cartas, una mano está compuesta por 4 naipes.

¿Cuántas manos distintas se pueden formar con una baraja española (40 cartas)?

Número de manos distintas: $C_{40,4} = \dfrac{40!}{4! \cdot 36!} = 91\,390$

16.27 En una clase de 4.º de ESO se realiza la elección del delegado y del subdelegado entre 5 alumnos.

a) ¿Cuántos resultados posibles existen?

b) Si Juan Gómez es uno de los candidatos, ¿en cuántos de los resultados anteriores es elegido como subdelegado?

a) Resultados posibles: $V_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$

b) Juan Gómez sería subdelegado con 4 posibles delegados; por tanto, estaría en 4 elecciones.

16.28 En un juego de mesa se utilizan 15 tarjetas de 3 colores distintos.

Si cada uno de los chicos coge 3 tarjetas, ¿cuántas posibilidades hay de que los dos tengan la misma combinación?

Número de posibilidades de que los chicos tengan la misma combinación: $P_3 = 3! = 6$

16.29 Los alumnos del último curso de un centro escolar desean formar una comisión con 3 alumnas y 2 alumnos para organizar el viaje de fin de curso. El número total de alumnas es de 25 y el de alumnos es de 20.

¿De cuántas formas distintas pueden completar dicha comisión?

Formas de completar la comisión: $C_{25,\,3} \cdot C_{20,\,2} = \binom{25}{3} \cdot \binom{20}{2} = \frac{25!}{22! \cdot 3!} \cdot \frac{20!}{18! \cdot 2!} = 437\,000$

16.30 Con las letras de la palabra EUROPA, ¿cuántos grupos de 4 letras se pueden formar? ¿Cuántos de ellos acaban en vocal?

Se pueden formar en total: $V_{6,\,4} = 360$ grupos de 4 letras.

En vocal acaban: $4 \cdot V_{5,\,3} = 240$ grupos.

16.31 La mesa de un colegio electoral se halla compuesta por el presidente, el vicepresidente, dos vocales y dos interventores.

¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse si el presidente y el vicepresidente han de situarse juntos?

El presidente y el vicepresidente pueden sentarse juntos de 10 formas diferentes.

En total, tendremos $10 \cdot 4! = 240$ maneras distintas de sentarse.

16.32 **Fayna dispone de 5 faldas, 4 camisetas y 3 pares de zapatos.**

¿Cuántas posibilidades tiene para elegir el conjunto que vestirá mañana? ¿En cuántas de ellas no intervienen ni el rojo ni el negro?

Posibilidades para elegir el conjunto que vestirá: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Posibilidades en las que no intervienen ni el rojo ni el negro: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

Números combinatorios

16.33 **Calcula el valor de $\binom{15}{8} + \binom{15}{9}$ de dos formas distintas: utilizando la fórmula de obtención de los números combinatorios y usando las propiedades de dichos números.**

$$\frac{15!}{8! \cdot 7!} + \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 6435 + 5005 = 11\,440$$

$$\binom{15}{8} + \binom{15}{9} = \binom{16}{9} = \frac{16!}{9! \cdot 7!} = 11\,440$$

16.34 **Determina el valor de estos números combinatorios.**

a) $\binom{8000}{0}$

b) $\binom{10\,000}{9999}$

c) $\binom{5252}{5252}$

d) $\binom{10^{10}}{1}$

a) 1

b) 10 000

c) 1

d) 10^{10}

16.35 **Halla el valor de x en estas igualdades.**

a) $\binom{52}{6} = \binom{52}{x}$

b) $\binom{x}{14} = \binom{x}{32}$

a) $\binom{52}{6} = \binom{52}{x} \Rightarrow x = 52 - 6 = 46$

b) $\binom{x}{14} = \binom{x}{32} \Rightarrow x = 32 + 14 = 46$

Binomio de Newton

16.36 Desarrolla las siguientes potencias.

a) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^5$

b) $(2a - b)^6$

c) $\left(3x + \dfrac{2}{x}\right)^4$

d) $(y^2 - 2z^3)^3$

a) $1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{10}{x^2} - \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{5}{x^4} - \dfrac{1}{x^5}$

b) $64a^6 - 192a^5b + 240a^4b^2 - 160a^3b^3 + 60a^2b^4 - 12ab^5 + b^6$

c) $81x^4 + 216x^2 + 216 + \dfrac{96}{x^2} + \dfrac{16}{x^4}$

d) $y^6 - 6y^4z^3 + 12y^2z^6 - 8z^9$

16.37 Sin realizar todo el desarrollo, halla:

a) El término situado en quinto lugar en el desarrollo del binomio $(x + 4y)^{16}$.

b) El término colocado en octava posición en el desarrollo del binomio $(a - 3b)^{14}$.

a) $\dbinom{16}{4}x^{12}\,(4y)^4 = 465\,920x^{12}y^4$

b) $\dbinom{14}{7}a^7\,(-3b)^7 = -7\,505\,784a^7b^7$

16.38 En el desarrollo de este binomio de Newton: $\left(5x - \dfrac{y}{4}\right)^9$

Averigua sin desarrollarlo:

a) El coeficiente del monomio x^2y^7.

b) El coeficiente del monomio x^5y^4.

c) Los coeficientes de los monomios que solo tienen x o y.

a) $\dbinom{9}{7}(5x)^2\left(\dfrac{-y}{4}\right)^7 = \dfrac{-225}{4096}x^2y^7 \Rightarrow \text{Coeficiente} = \dfrac{-225}{4096}$

b) $\dbinom{9}{4}(5x)^5\left(\dfrac{-y}{4}\right)^4 = \dfrac{196\,875}{128}x^5y^4 \Rightarrow \text{Coeficiente} = \dfrac{196\,875}{128}$

c) $\dbinom{9}{0}(5x)^9 = 1\,953\,125x^9 \Rightarrow \text{Coeficiente} = 1\,953\,125$

$\dbinom{9}{9}\left(\dfrac{-y}{4}\right)^9 = \dfrac{-1}{262\,144}y^9 \Rightarrow \text{Coeficiente} = \dfrac{-1}{262\,144}$

16.39 Con estos símbolos: # @ & $

Forma todos los grupos posibles del siguiente tipo: ###&&$ @@#&$$ &&&$@&

Utiliza un diagrama en árbol y realiza el recuento de resultados.

Se pueden formar todos los grupos de 6 elementos con 4 integrantes distintos, es decir, los grupos correspondientes a las $VR_{4,\,6} = 4096$.

16.40 ¿De qué forma se obtienen más grupos diferentes de 4 letras distintas: permutando las de la palabra CANOA o las de la palabra LIBRO? ¿Por qué?

Permutando las letras de la palabra LIBRO, ya que todas sus letras son distintas, y las P_5 palabras posibles son todas diferentes. La palabra CANOA, sin embargo, tiene dos letras iguales que generan palabras repetidas.

16.41 ¿Por qué 7! es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez?

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow 7!$ es múltiplo de 2, 3 y 5 a la vez porque tiene estos tres números entre sus factores.

16.42 Si $9! = 362\,880$, calcula de forma inmediata el valor de 10! ¿Existe una relación entre $n!$ y $(n + 1)!$?

$10! = 10 \cdot 9! = 3\,628\,800$

Relación entre $n!$ y $(n + 1)!$: $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

16.43 Si $x! = 479\,001\,600$ y $(x - 1)! = 43\,545\,600$, halla el valor de x.

$$11 = \frac{479\,001\,600}{43\,545\,600} = \frac{x}{(x-1)!} = \frac{x\,(x-1)!}{(x-1)!} = x \Rightarrow x = 11$$

16.44 ¿Tiene sentido calcular el número de variaciones de 3 elementos tomados de 5 en 5? Razona tu respuesta.

No, ya que es imposible formar grupos de 5 miembros con tan solo 3 integrantes si no se pueden repetir.

16.45 Con los dígitos 3, 5 y 9 se forman todos los números posibles de 4 cifras. ¿Cómo hallamos el número de resultados, con $VR_{3,\,4}$ o con $V_{4,\,3}$?

Con $VR_{3,\,4}$, pues no queda más remedio que haya repetición, al ser mayor el número de cifras del número que los dígitos disponibles.

16.46 Relaciona en tu cuaderno las operaciones de la columna de la izquierda con la herramienta combinatoria correspondiente de la derecha.

7^4	P_7
$\dfrac{7!}{4!3!}$	$VR_{7,\,4}$
$7!$	$V_{7,\,4}$
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$	$C_{7,\,4}$

$7^4 = VR_{7,\,4}$ $\quad \dfrac{7!}{4!3!} = C_{7,\,4}$ $\quad 7! = P_7$ $\quad 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = V_{7,\,4}$

16.47 **Calcula:**

a) $V_{5,5}$

b) P_5

c) P_8

d) $V_{8,8}$

¿Qué observas? ¿Cuál es la relación entre las variaciones de *n* elementos tomados de *n* en *n* y las permutaciones de *n* elementos?

a) $V_{5,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

d) $V_{8,8} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Se observa que $V_{5,5} = P_5$ y que $P_8 = V_{8,8}$. Se deduce, pues, que, en general, $V_{n,n} = P_n$.

16.48 **Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

a) En las variaciones con repetición no importa el orden.

b) En las variaciones sin repetición sí importa el orden.

c) En las permutaciones importa el orden.

d) En las combinaciones importa el orden.

a) Falso.
b) Verdadero.
c) Verdadero.
d) Falso.

16.49 **Indica qué otro número combinatorio de la misma fila del triángulo de Pascal vale lo mismo que:**

a) $\binom{15}{0}$

b) $\binom{15}{2}$

a) $\binom{15}{15}$, ya que $15 + 0 = 15$

b) $\binom{15}{13}$, ya que $13 + 2 = 15$

PROBLEMAS PARA APLICAR

16.50 **Una persona ha olvidado su clave de la tarjeta de crédito. Sólo recuerda que empieza por 9 y que es un número par.**

¿Qué posibilidad tiene de encontrarla sabiendo que las claves son de 4 cifras con posible repetición?

Las posibilidades en cada cifra son las siguientes: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$.

16.51 **En un intercambio cultural participan 24 alumnos. El monitor responsable desea distribuirlos por parejas para completar los asientos del autobús que van a utilizar en los desplazamientos.**

a) ¿De cuántas formas puede realizarlo?

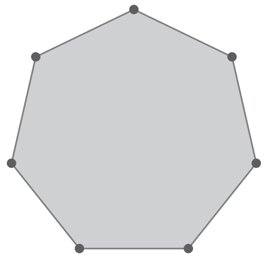
b) Si hay 8 alumnos del mismo país, ¿en cuántas disposiciones estos 8 alumnos no están emparejados entre ellos?

a) En total hay $C_{24,2} = 276$ agrupamientos posibles.

b) En $C_{8,2} = 28$ de esos agrupamientos están los alumnos del mismo país juntos.

Por tanto, en $276 - 28 = 248$ los alumnos del mismo país están mezclados con el resto.

16.52 **Uniendo 5 vértices de un heptágono se obtiene un pentágono.**



¿Cuántos pentágonos distintos se pueden conseguir siguiendo este procedimiento?

Número de pentágonos: $C_{7,\,5} = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$

16.53 **Los números escritos en base ocho solo permiten el uso de las cifras del 0 al 7.**

¿Cuántos números de 4 cifras escritos en dicha base tienen todas las cifras distintas?

Números de 4 cifras: $V_{8,\,4} = \dfrac{8!}{4!} = 1680$

16.54 **Un equipo de balonmano está formado por seis jugadores de campo y por un portero. Si un entrenador dispone de 12 jugadores de campo y de 2 porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede completar?**

Número de alineaciones distintas: $2 \cdot C_{12,\,6} = 2 \cdot \dfrac{12!}{6! \cdot 6!} = 1848$

16.55 **La contraseña de acceso a la cuenta de cierto correo electrónico está formada por 8 caracteres: los 5 primeros son dígitos del 1 al 9, y los 3 últimos son vocales.**

¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar?

Número de contraseñas distintas: $VR_{9,\,5} \cdot VR_{5,\,3} = 9^5 \cdot 5^3 = 7\,381\,125$

16.56 **Un programa de ordenador descifra claves secretas en tiempo récord. Una agencia de investigación necesita descubrir un código de 5 dígitos y 3 letras (y en ese orden).**

Sabiendo que emplea una milésima de segundo en analizar cada código, ¿cuántos días tardará en desvelar el código secreto?

Número de códigos posibles: $VR_{10,\,5} \cdot VR_{27,\,3} = 10^5 \cdot 27^3 = 1\,968\,300\,000$

El tiempo que se tarda en descifrarlos será igual a:

$1\,968\,300\,000 \cdot 0{,}001 = 1\,968\,300$ seg $= 32\,805$ min $= 546{,}75$ h $= 22{,}8$ días aproximadamente

16.57 **La codificación de los libros de una biblioteca se establece de la siguiente manera: los 3 primeros dígitos del código hacen referencia a la sección a la que pertenecen; los 2 siguientes, al número de la estantería en la que se encuentran, y los 2 últimos, a la posición que ocupan dentro de dicha estantería.**

Teniendo en cuenta que se utilizan las cifras del 0 al 9, ¿cuántos libros se pueden codificar?

Número de libros que se pueden codificar: $VR_{10,\,7} = 10^7 = 10\,000\,000$.

16.58 **Entre las actividades de fin de curso de un centro se organiza un partido y se premia a quien adivine el resultado del encuentro. Contabiliza todos los tanteos que en principio se pueden producir si se ha decidido imponer un tope de 7 goles por equipo.**

Si han apostado 4 personas por cada resultado y cada apuesta cuesta un euro, ¿cuánto recibe cada uno de los que ganen?

Tanteos posibles: $VR_{8,\,2} = 8^2 = 64$ posibles resultados

Dinero recaudado $= 64 \cdot 4 = 256$ €

Por tanto, cada uno de los cuatro ganadores recibirá $256 : 4 = 64$ €.

16.59 **Con las 27 letras independientes del alfabeto:**

a) ¿Cuántos grupos de 5 letras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos empiezan y terminan con vocal?

c) ¿Cuántos empiezan por consonante y terminan con vocal?

a) Grupos de 5 letras distintas: $V_{27,\,5} = 9\,687\,600$

b) Grupos que empiezan y terminan con vocal:

$V_{25,\,3}$ (las 3 letras del centro) $\cdot$ $V_{5,\,2}$ (las posibles ordenaciones de las 5 vocales en el inicio y final) $= 276\,000$

c) Grupos que empiezan por consonante y terminan con vocal:

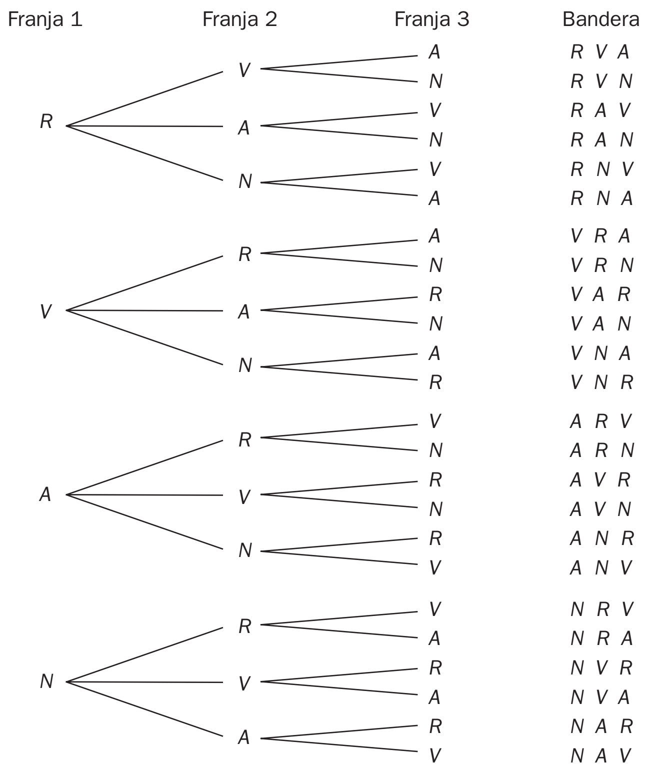
22 (posibles consonantes) $\cdot$ $V_{25,\,3}$ (ordenaciones en puestos del centro de todas las letras menos 2) $\cdot$ 5(posibles vocales al final) $= 1\,518\,000$

R E F U E R Z O

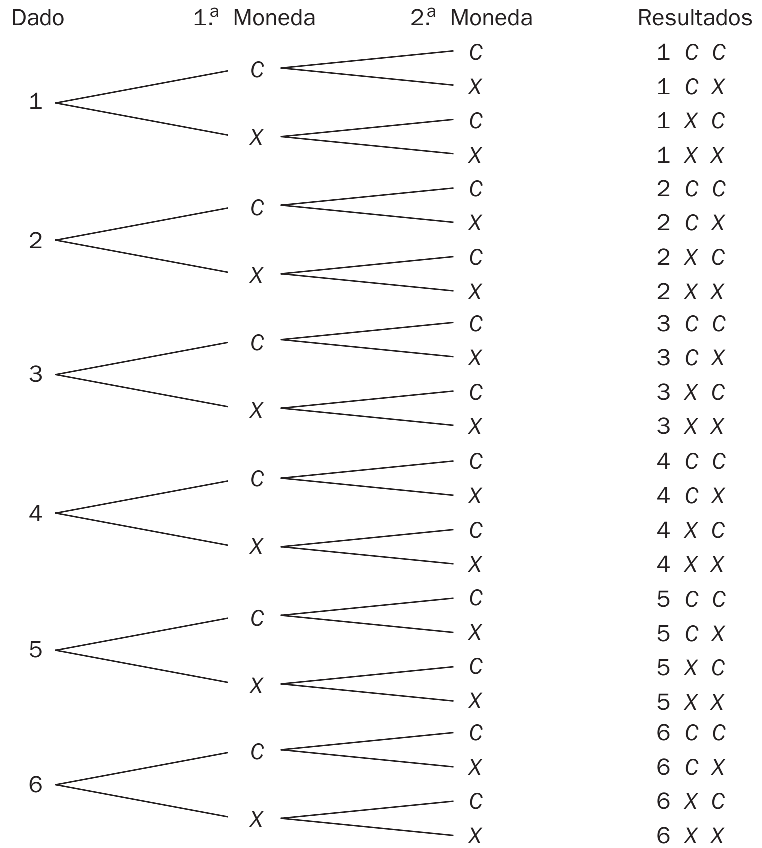
Diagramas de árbol

16.60 **Disponemos de los colores rojo, verde, amarillo y negro para formar todas las banderas posibles con 3 franjas verticales.**

Dibuja un diagrama en árbol que represente todas las banderas resultantes de tal manera que no se repitan colores en la misma bandera.



16.61 **Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y dos monedas de un euro.**



Permutaciones, variaciones y combinaciones

16.62 **¿De cuántas maneras se pueden sentar 7 amigos que acuden a un concierto de música clásica en una fila de 7 butacas?**

Formas de sentarse: $P_7 = 7! = 5040$

16.63 **Cierta comarca está formada por 15 pueblos, y todos sus ayuntamientos deciden rehabilitar sus carreteras.**

Si todas las localidades se encuentran comunicadas entre sí, ¿cuántas carreteras deberán rehabilitarse?

Número de carreteras que se deben rehabilitar: $C_{15,\,2} = \dfrac{15!}{2! \cdot 13!} = 105$

16.64 **En una bolsa hay 8 bolas numeradas del 1 al 8. Extraemos una, anotamos su número y la devolvemos a la bolsa. Repetimos la operación 3 veces.**

¿Cuántos resultados distintos se pueden dar?

Número de resultados distintos: $VR_{8,\,3} = 8^3 = 512$

16.65 **Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9:**

a) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden conseguir?

c) ¿Cuántos productos de 3 factores distintos se pueden realizar?

Tenemos 5 cifras impares {1, 3, 5, 7, 9}.

a) Números de 3 cifras distintas $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) Números de 5 cifras diferentes: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) Productos de 3 factores distintos: $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

Números combinatorios. Binomio de Newton

16.66 **Completa en tu cuaderno los recuadros con el número combinatorio correspondiente.**

a) $\dbinom{8}{5} + \square = \dbinom{9}{6}$

b) $\square + \dbinom{11}{9} = \dbinom{12}{9}$

a) $\dbinom{8}{6}$

b) $\dbinom{11}{8}$

16.67 **¿Qué número de fila del triángulo de Pascal es la siguiente?**

1 6 15 20 15 6 1

Es la fila número 6 del triángulo. La que corresponde a la serie de números combinatorios $\dbinom{6}{n}$ $0 \leqslant n \leqslant 6$, al tener 7 elementos.

16.68 **Completa en tu cuaderno los recuadros correspondientes en este desarrollo del binomio de Newton.**

$$\left(2a - \frac{1}{a}\right)^3 = \square a^{\square} - \square\, a + \square - \frac{\square}{a^{\square}}$$

$$\left(2a - \frac{1}{a}\right)^3 = 8a^3 - 12a + \frac{6}{a} - \frac{1}{a^3}$$

16.69 **El término 13 del desarrollo de este binomio de Newton es un número natural.** $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$

¿De qué número se trata?

El número natural buscado es: $\dbinom{15}{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^{12} = 87\,360$

16.70 Con los números del 1 al 6 (ambos inclusive), ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse que sean divisibles por 3?

Podrán formarse $8 \cdot 3! = 48$ números de 3 cifras distintos.

16.71 ¿Cuántos números capicúas de 4 cifras existen? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos son múltiplos de 5? ¿Cuántos son menores que 3200?

Números capicúas de 4 cifras: $VR_{10,\,2} = 10^2 = 100$. Ahora, $100 - 10$ (los que empiezan por 0) $= 90$.

Números capicúas pares: $4 \cdot 10 = 40$

Números capicúas múltiplos de 5 son solo los que terminan por 5. Hay 10 que empiezan o terminan por 5.

Números capicúas menores que 3200 son los que empiezan por 1 (hay 10), los que empiezan por 2 (hay 10) y los que empiezan por 31 (hay 1). En total tendremos 21.

16.72 De todos los resultados posibles al lanzar 3 dados cúbicos, ¿en cuántos de ellos aparece al menos un 5?

Todas las posibilidades son: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$.

(Salir al menos un cinco) $\cup$ (Salir ningún cinco) $=$ Total.

Salir ningún cinco: $VR_{5,\,3} = 5^3 = 125$.

Salir al menos un cinco: $216 - 125 = 91$.

16.73 Con las cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9:

a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener al sumar de 3 en 3 las cifras?

b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar, ¿cuántos son mayores que 70 000?

c) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden conseguir? Averigua la suma de todos ellos.

a) Número de resultados distintos al sumar de 3 en 3 las cifras $= C_{5,\,3} = 10$.

b) De los números de 5 cifras diferentes que se pueden formar son mayores que 70 000: $2 \cdot P_4 = 48$.

c) Números de 3 cifras distintas $= V_{5,\,3} = 60$

Para calcular la suma de todos ellos:

Al ser números de tres cifras, serán de la forma $\underline{C}\ \underline{D}\ \underline{U}$ (centenas, decenas y unidades).

$\Sigma\, U = V_{4,\,2} \cdot 9 + V_{4,\,2} \cdot 7 + V_{4,\,2} \cdot 5 + \ldots + V_{4,\,2} \cdot 1 = 300$

$\Sigma\, D = 10 \cdot 300 = 3000$

$\Sigma\, C = 100 \cdot 300 = 30\,000$

Σ Total $= 33\,300$

16.74 Determina cuál de las siguientes relaciones es la correcta, siendo *n* un número natural mayor que 1, y justifica tu respuesta.

$n! < n^n$ $\qquad$ $n! = n^n$ $\qquad$ $n! > n^n$

La relación correcta es la primera, ya que $\underbrace{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{(n \text{ factores})} < \underbrace{n^n = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{(n \text{ factores})}$

16.75 Halla todos los valores de *n* que verifican la siguiente igualdad. $\frac{C_{n+1,\,3}}{C_{n,\,4}} = \frac{6}{5}$

$$\frac{C_{n+1,\,3}}{C_{n,\,4}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{24(n+1)}{6\,(n-2)\,(n-3)} = \frac{6}{5} \Rightarrow n = 8 \text{ o } n = \frac{1}{3}$$

La solución es $n = 8$, al ser el único número natural.

16.76 En el triángulo de Pascal suma todos los términos de cada fila y averigua qué tipo de sucesión forman los resultados. Calcula su término general.

Las sumas de los términos de cada fila son: $S_1 = 2 \quad S_2 = 4 \quad S_3 = 8 \quad S_4 = 16 \ldots$

Se observa que estos sumandos forman una progresión geométrica de razón 2. Su término general es $S_n = 2^n$.

16.77 Halla los coeficientes desconocidos en este desarrollo del binomio de Newton.

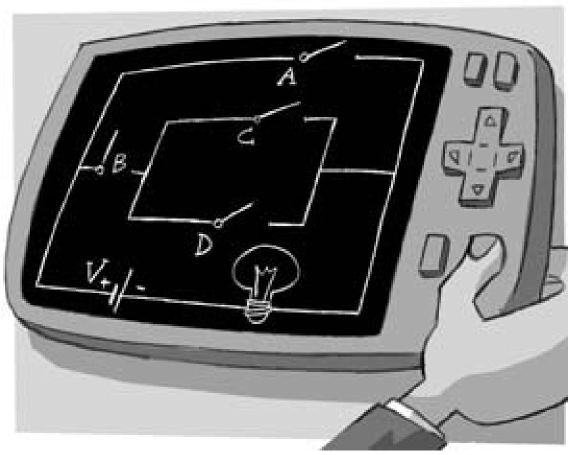
$$\mathbf{(2x^2 - x^3)^5 = x^{10}(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)}$$

$$(2x^2 - x^3)^5 = -x^{15} + 10x^{14} - 40x^{13} + 80x^{12} - 80x^{11} + 32x^{10} = x^{10}\,(-x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32)$$

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

16.78 El circuito

En el circuito eléctrico de la figura, los interruptores pueden estar abiertos (no dejan pasar la corriente) o cerrados (permiten que fluya).



Se considera la siguiente notación: [*A*], si el circuito *A* está cerrado, y (*A*), si se encuentra abierto.

a) Indica, en cada uno de los siguientes casos, si la bombilla lucirá o no.

1. (*A*) (*B*) [*C*] [*D*]

2. [*A*] (*B*) (*C*) (*D*)

b) Escribe todas las posibilidades que se pueden dar de circuitos abiertos y cerrados, y especifica en cuántos de ellos lucirá la bombilla y en cuántos no.

a) En el caso 1, la bombilla no lucirá.

En el caso 2, la bombilla sí lucirá.

b) Las posibilidades son:

(*A*) (*B*) (*C*) (*D*)	no	(*A*) [*B*] (*C*) (*D*)	no	[*A*] (*B*) (*C*) (*D*)	sí	[*A*] [*B*] (*C*) (*D*)	sí
(*A*) (*B*) [*C*] (*D*)	no	(*A*) [*B*] [*C*] (*D*)	sí	[*A*] (*B*) [*C*] (*D*)	sí	[*A*] [*B*] [*C*] (*D*)	sí
(*A*) (*B*) (*C*) [*D*]	no	(*A*) [*B*] (*C*) [*D*]	sí	[*A*] (*B*) (*C*) [*D*]	sí	[*A*] [*B*] (*C*) [*D*]	sí
(*A*) (*B*) [*C*] [*D*]	no	(*A*) [*B*] [*C*] [*D*]	sí	[*A*] (*B*) [*C*] [*D*]	sí	[*A*] [*B*] [*C*] [*D*]	sí

16.79 Equipo propio

Elena quiere montar un equipo informático. Para ello debe realizar las siguientes actividades.

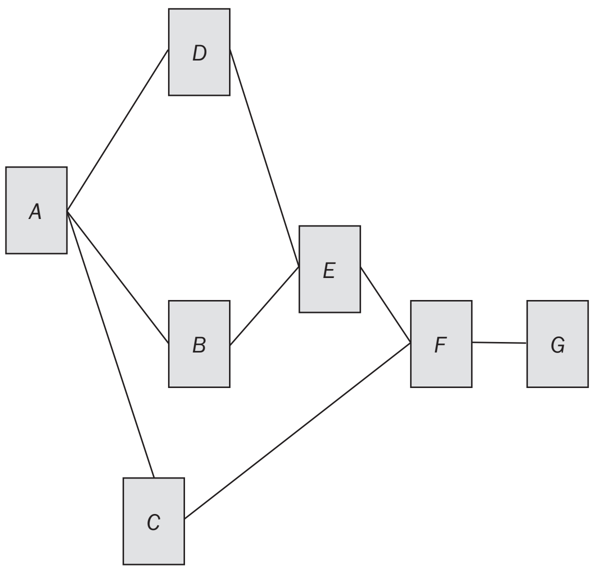
A	**Adquirir los componentes fundamentales: placa base, memoria, disco duro, lector de DVD, etc.**
B	**Disponer los periféricos principales: monitor, teclado, ratón e impresora.**
C	**Comprar el *software* básico.**
D	**Componer la unidad central.**
E	**Conectar los periféricos principales.**
F	**Instalar los programas esenciales.**
G	**Instalar los periféricos principales.**

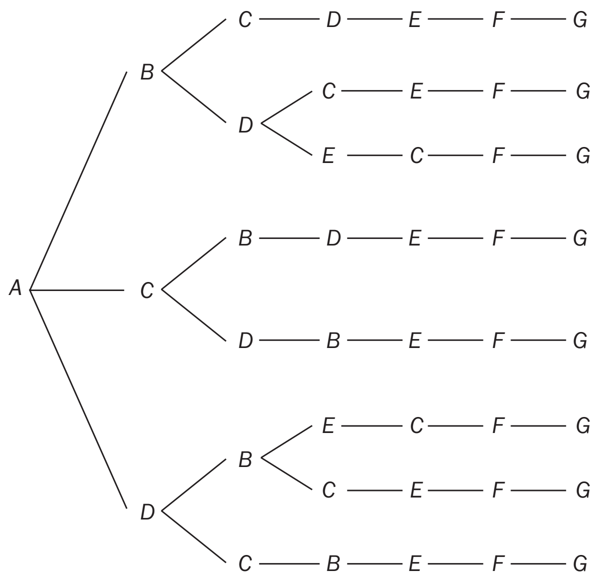
Para completar el montaje del equipo es necesario establecer un determinado orden y cumplir obligatoriamente las siguientes condiciones.

- **La primera actividad debe ser la *A*.**
- **Antes de realizar la *E*, deben terminarse la *B* y la *D*.**
- **Es imprescindible completar las actividades *B*, *C*, *D* y *E* antes de ejecutar la *F*.**
- **Antes de desarrollar la actividad *G*, deben quedar terminadas todas las demás.**

Suponiendo que no se pueden realizar dos actividades a la vez, indica todos los órdenes diferentes en los que se puede completar el montaje. ¿En cuántos se efectúa la actividad *E* antes que la *C*?

Dibujamos dos diagramas en los que queden reflejados tanto el orden como las condiciones que deben cumplirse para completar el montaje:

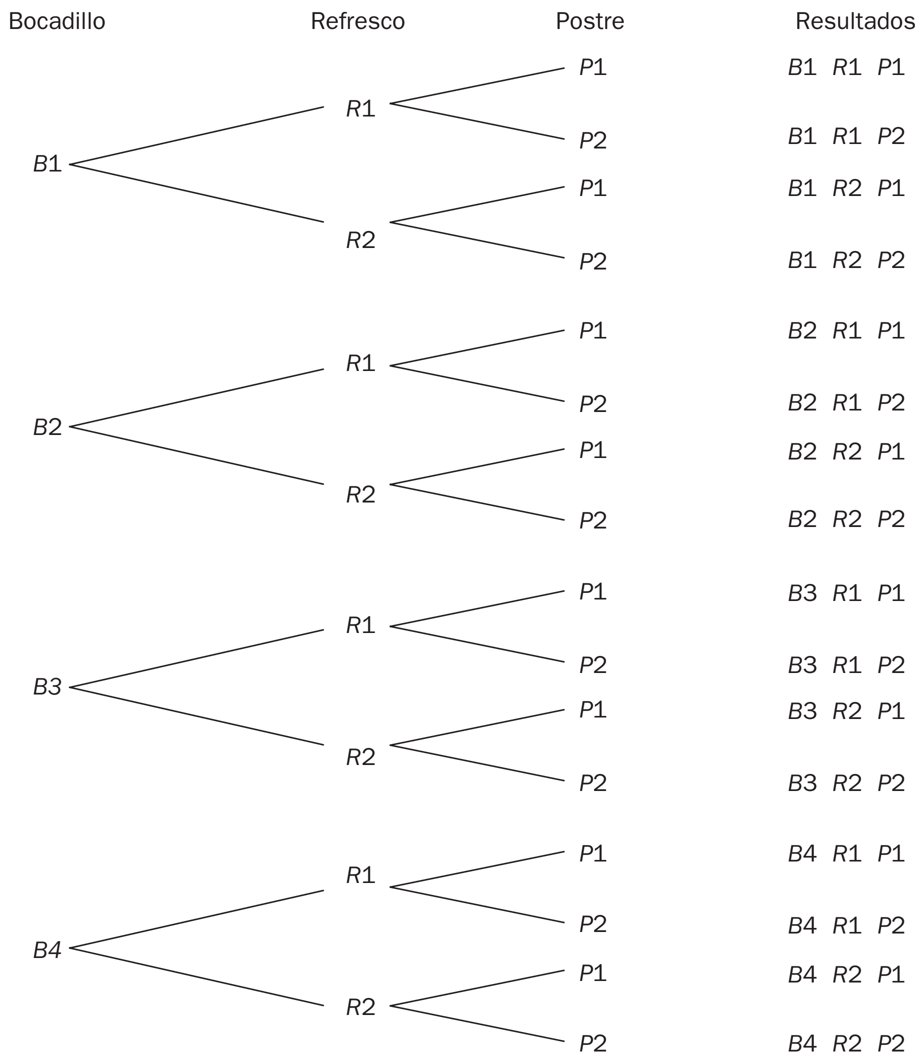




Del segundo diagrama se deduce que se pueden llevar 8 órdenes diferentes.

En dos de ellos se realiza *E* antes que *C*.

16.A1 Se organiza una fiesta solidaria con el fin de recaudar fondos para el centro de personas mayores del barrio. En dicha fiesta se disponen 4 tipos de bocadillos, 2 clases de refrescos y 2 postres. Dibuja el diagrama en árbol correspondiente a la elección de un bocadillo, un refresco y un postre. ¿Cuántas posibilidades distintas existen?



Hay $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ posibilidades distintas.

16.A2 La primera fila del palco presidencial de un estadio de fútbol se halla compuesta de 11 asientos. ¿De cuántas formas pueden completarse con los miembros de los equipos directivos de manera que los dos presidentes se sienten juntos?

Número de formas de sentarse de modo que los dos presidentes estén juntos: $2 \cdot P_{10} = 2 \cdot 10! = 7\,257\,600$.

16.A3 Juan quiere irse de viaje el fin de semana, y dispone de 5 camisetas de las cuales desea llevar 3. ¿De cuántas formas distintas puede realizar la elección?

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{5,\,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.

16.A4 **¿De cuántas formas diferentes se pueden escoger 3 figuras de entre todas las existentes en una baraja española de 40 cartas?**

Número de formas distintas de hacer la elección: $C_{12,\,3} = \dfrac{12!}{3! \cdot 9!} = 220.$

16.A5 **¿Cuántos números de 4 cifras se pueden constituir con los dígitos 2, 4, 6, 8 y 9? ¿Cuántos de ellos son pares? ¿Cuántos se podrían formar sin repetir ningún dígito?**

Números de 4 cifras: $VR_{5,\,4} = 5^4 = 625$

Números pares: $4 \cdot VR_{5,\,3} = 500$

Números con cifras distintas: $V_{5,\,4} = 120$

16.A6 **Calcula el valor de *x* en estas igualdades.**

a) $\boldsymbol{V_{x,4} = 6V_{x,2}}$

b) $\boldsymbol{P_x = 20P_{x-2}}$

a) $\dfrac{x!}{(x-4)!} = 6 \cdot \dfrac{x!}{(x-2)!} \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 5$

b) $x! = 20 \cdot (x-2)! \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$

16.A7 **Halla el valor de *x* (*x* ≠ 13) en esta igualdad.**

$$\boldsymbol{\binom{24}{13} = \binom{24}{x}}$$

$\binom{24}{13} = \binom{24}{x} \Rightarrow x = 24 - 13 = 11$

16.A8 **Desarrolla las siguientes potencias.**

a) $\boldsymbol{(3a + 5b)^4}$

b) $\boldsymbol{(2x - 3y)^5}$

a) $(3a + 5b)^4 = 81a^4 + 540a^3b + 1350a^2b^2 + 1500ab^3 + 625b^4$

b) $(2x - 3y)^5 = 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$

Lanzar dados

Al lanzar dos dados equilibrados, el resultado de sumar sus caras superiores puede ser el mismo de formas distintas. Si se juega con tres dados, el número de formas diferentes en las que aparecen los mismos resultados aumenta. Entonces, ¿por qué al lanzar dos dados se obtiene 9 como resultado con mayor frecuencia que 10, y, al lanzar tres, 10 con mayor frecuencia que 9?

Si lanzamos dos dados, obtenemos sumas 9 y 10 de dos formas diferentes:

$9 = 3 + 6 = 4 + 5$

$10 = 4 + 6 = 5 + 5$

Pero se han de tener en cuenta todas las permutaciones:

9:	$3 + 6$	10:	$4 + 6$
	$6 + 3$		$6 + 4$
	$4 + 5$		$5 + 5$
	$5 + 4$		
4 formas diferentes		3 formas diferentes	

Al lanzar tres dados, la suma de 9 y 10 se puede obtener de 6 formas, pero al contar las permutaciones se tiene:

9:	$1 + 2 + 6 \rightarrow 3! = 6$	10:	$1 + 3 + 6 \rightarrow 3! = 6$
	$1 + 3 + 5 \rightarrow 3! = 6$		$1 + 4 + 5 \rightarrow 3! = 6$
	$1 + 4 + 4 \rightarrow 3$		$2 + 2 + 6 \rightarrow 3$
	$2 + 2 + 5 \rightarrow 3$		$2 + 3 + 5 \rightarrow 3! = 6$
	$2 + 3 + 4 \rightarrow 3! = 6$		$2 + 4 + 4 \rightarrow 3$
	$3 + 3 + 3 \rightarrow 1! = 1$		$3 + 3 + 4 \rightarrow 3$
	25 casos diferentes		27 casos diferentes

Por tanto, con dos dados, de las 36 posibilidades se obtiene suma 9 en 4 casos y suma 10 en 3 casos. Al lanzar 3 dados, de los 216 casos, la suma 9 se obtiene en 25 casos, y la 10, en 27 casos.