

## EJERCICIOS PROPUESTOS

13.1 Halla la tasa de variación media de la función  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  en los siguientes intervalos.

a) [3, 4]

b) [6, 7]

¿En cuál de ellos la función  $f$  crece o decrece, en media, más rápidamente?

$$a) TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 - [3^2 - 3 \cdot 3 + 1] = 4$$

$$b) TV[6, 7] = f(7) - f(6) = 7^2 - 3 \cdot 7 + 1 - [6^2 - 3 \cdot 6 + 1] = 10$$

Como la tasa de variación en el intervalo [6, 7] es mayor que en el intervalo [3, 4], siendo la amplitud la misma, concluimos que la función  $f$  crece más deprisa en el intervalo [6, 7] que en el intervalo [3, 4].

13.2 Calcula la tasa de variación media de las funciones  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  y  $g(x) = x^3 - 2x + 1$  en el intervalo  $[-1, 0]$ .

Compara el crecimiento medio de ambas funciones en ese intervalo.

$$TVM[-1, 0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{(0^3 - 3 \cdot 0 + 1) - [(-1)^3 - 3(-1) + 1]}{1} = \frac{1 - 3}{1} = -2$$

$$TVM[-1, 0] = \frac{g(0) - g(-1)}{0 - (-1)} = \frac{(0^3 - 2 \cdot 0 + 1) - [(-1)^3 - 2(-1) + 1]}{1} = \frac{1 - 2}{1} = -1$$

Las dos funciones decrecen, en media, en el intervalo  $[-1, 0]$ , decreciendo más rápido la función  $f$ , porque su tasa de variación media en el mismo intervalo es mayor en valor absoluto.

13.3 Calcula la tasa de variación instantánea de la función  $f(x) = x^2 + 1$  en los puntos  $x = 2$  y  $x = 5$ .

$$TVI[2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + 1 - (2^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$$

$$TVI[5] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^2 + 1 - (5^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 10) = 10$$

13.4 Dada la función  $g(x) = 2x^2 + 3$ , halla la tasa de variación instantánea en  $x = 1$  y en  $x = -2$ .

$$TVI[1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 + 3 - (2 \cdot 1^2 + 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4) = 4$$

$$TVI[-2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-2+h)^2 + 3 - [2 \cdot (-2)^2 + 3]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h - 8) = -8$$

13.5 Calcula la derivada de las siguientes funciones en  $x_0 = 2$ .

a)  $f(x) = -7$

b)  $g(x) = -4x + 1$

c)  $h(x) = x^2 - 5$

$$a) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-7 - (-7)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$b) g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-4(2+h) + 1] - [-4 \cdot 2 + 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{h} = -4$$

$$c) h'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h) - h(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h)^2 - 5] - (2^2 - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 5 + 1}{h} = 4$$

13.6 Halla la derivada de  $f(x) = 6x^2 - 2x - 3$  en estos puntos.

a)  $x_0 = 0$

b)  $x_0 = -3$

c)  $x_0 = 6$

$$a) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[6h^2 - 2h - 3] - (-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6h - 2) = -2$$

$$b) f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[6(-3+h)^2 - 2(-3+h) - 3] - 57}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h^2 - 38h}{h} = -38$$

$$c) f'(6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[6(6+h)^2 - 2(6+h) - 3] - 201}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h^2 + 70h}{h} = 70$$

13.7 Halla la pendiente de las tangentes a las siguientes funciones en los puntos indicados.

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ , en el punto  $x = 2$

b)  $f(x) = x^3 - 2$ , en el punto  $x = 1$

$$a) m = f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h)^2 - 2(2+h) + 1] - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

$$b) m = f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^3 - 2] - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h + 3) = 3$$

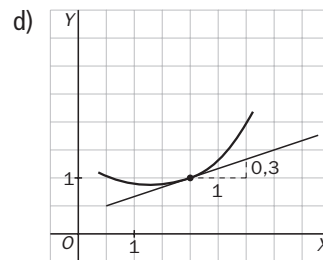
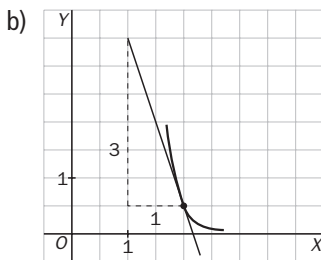
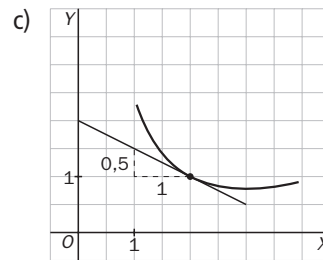
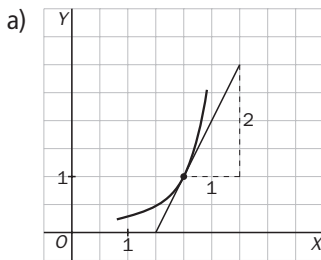
13.8 Esboza la gráfica de la función  $g(x)$  en el punto de abscisa  $x = 2$  si su derivada vale lo siguiente.

a)  $g'(2) = 2$

c)  $g'(2) = -0,5$

b)  $g'(2) = -3$

d)  $g'(2) = 0,3$



13.9 Halla la ecuación de las rectas tangentes a estas funciones en los puntos indicados.

a)  $y = x^2$  en  $x_0 = -1$

b)  $y = 2x^2 + 3x$  en  $x_0 = 2$

$$a) m = f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$$

$$y_0 = f(-1) = (-1)^2 = 1$$

La recta tangente a  $f(x) = x^2$  en  $x_0 = -1$  es:  $y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$ .

$$b) m = f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(2+h)^2 + 3(2+h)] - 14}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 11h}{h} = 11$$

$$y_0 = f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 14$$

La recta tangente a  $f(x) = 2x^2 + 3x$  en  $x_0 = 2$  es:  $y - 14 = 11(x - 2) \Rightarrow y = 11x - 8$ .

**13.10** ¿En qué punto la tangente a la gráfica de la función  $g(x) = 6x^2 - 24x + 11$  es paralela al eje de abscisas?

Al ser la tangente paralela al eje de abscisas,  $y = 0$ , tiene su misma pendiente,  $m = 0$ .

$$\begin{aligned} m = 0 = f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[6(x_0 + h)^2 - 24(x_0 + h) + 11] - (6x_0^2 - 24x_0 + 11)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[6x_0^2 + 2x_0h + h^2] - 24(x_0 + h) + 11 - 6x_0^2 + 24x_0 - 11}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x_0h + 6h^2 - 24h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (12x_0 + 6h - 24) = 12x_0 - 24 \end{aligned}$$

Entonces,  $m = 0 = 12x_0 - 24$ , por lo que  $x_0 = 2$ .

En el punto  $(2, f(2)) = (2, -13)$ , la tangente a  $f(x) = 6x^2 - 24x + 11$  es paralela al eje de abscisas.

**13.11** Indica cuál de las siguientes rectas es tangente a la gráfica de  $f(x) = x^2 + 15000$  en  $x_0 = 0$ .

a)  $y = 15000$

b)  $y = 15000x$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 15000 - 15000}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

$$f(0) = 15000$$

La recta tangente a  $f(x) = x^2 + 15000$  en  $x_0 = 0$  es la del apartado a.

**13.12** Encuentra un punto perteneciente a la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 5x + 7$ , en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Al ser la tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante,  $y = x$ , tiene su misma pendiente,  $m = 1$ .

$$\begin{aligned} m = 1 = f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x_0 + h)^2 - 5(x_0 + h) + 7] - (x_0^2 - 5x_0 + 7)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 5(x_0 + h) + 7] - x_0^2 + 5x_0 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2 - 5h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h - 5) = 2x_0 - 5 \end{aligned}$$

Entonces,  $m = 1 = 2x_0 - 5$ , por lo que  $x_0 = 3$

En el punto  $(3, f(3)) = (3, 1)$ , la tangente a  $f(x) = x^2 - 5x + 7$  es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

**13.13** Halla la derivada de la función  $f(x) = x^2 + 1$  en los puntos  $x = 0, 1$  y  $2$  por estos dos procedimientos.

a) Calculando directamente  $f'(0)$ ,  $f'(1)$  y  $f'(2)$ .

b) Obteniendo la función derivada  $f'(x)$  y sustituyendo en ella los puntos  $x = 0, 1$  y  $2$ .

$$a) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1 + h)^2 + 1] - (1^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2 + h)^2 + 1] - (2^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$$

$$b) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

13.14 Calcula la función derivada de las siguientes funciones aplicando la definición.

a)  $f(x) = -2$

c)  $f(x) = x^2 - 3x$

b)  $f(x) = -2x + 5$

d)  $f(x) = 5x^2 + 2$

a)  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 - (-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$

b)  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-2(x+h) + 5] - (-2x + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2$

c)  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h)] - (x^2 - 3x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = 2x - 3$

d)  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h)^2 + 2] - 5x^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10xh + 5h^2}{h} = 10x$

13.15 Si  $f'(x) = 0$ , ¿qué podemos decir de la función  $f$ ?

$0 = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  para cualquier valor de  $x \Rightarrow f(x+h) - f(x) = 0$  para cualquier valor de  $x \Rightarrow f(x+h) = f(x)$  para cualquier valor de  $x$ . Por tanto, la función  $f(x)$  es constante.

13.16 Halla las derivadas de las siguientes funciones.

a)  $y = -2$

c)  $y = \sqrt{x}$

e)  $y = \frac{1}{x^4}$

b)  $y = x$

d)  $y = \sqrt[5]{x^4}$

f)  $y = x^{-\frac{7}{3}}$

a)  $y' = 0$

c)  $y' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e)  $y' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

b)  $y' = 1$

d)  $y' = (x^{\frac{4}{5}})' = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$

f)  $y' = -\frac{7}{3}x^{-\frac{7}{3}-1} = -\frac{7}{3}x^{-\frac{10}{3}} = -\frac{7}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

13.17 Calcula las derivadas de estas funciones.

a)  $y = e^x$

b)  $y = \frac{2^x}{3^x}$

c)  $y = e^x \cdot 2^x$

d)  $y = e^x \cdot 2^x \cdot 5^x$

a)  $y' = e^x$

b)  $y' = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3}$

c)  $y' = (2e)^x \cdot \ln(2e)$

d)  $y' = (10e)^x \cdot \ln(10e)$

13.18 Halla las derivadas del ejercicio anterior en el punto  $x_0 = 0$ .

a) 1

b)  $\ln \frac{2}{3}$

c)  $\ln(2e)$

d)  $\ln(10e)$

13.19 Halla las siguientes derivadas.

a)  $(7x^5)'$

d)  $(6x^9 - 21x^7 + 14x^4 - 3x^2 + 7)'$

b)  $(12 \operatorname{sen} x)'$

e)  $(2 \operatorname{sen} x - 15 \operatorname{cos} x)'$

c)  $(23 \cdot 5^x)'$

f)  $(\ln x^7 - \sqrt[6]{x^4} - 12^x)'$

a)  $(7x^5)' = 35x^4$

b)  $(12 \operatorname{sen} x)' = 12 \operatorname{cos} x$

c)  $(23 \cdot 5^x)' = 23 \cdot 5^x \ln 5$

d)  $(6x^9 - 21x^7 + 14x^4 - 3x^2 + 7)' = 54x^8 - 147x^6 + 56x^3 - 6x$

e)  $(2 \operatorname{sen} x - 15 \operatorname{cos} x)' = 2 \operatorname{cos} x + 15 \operatorname{sen} x$

f)  $(7 \ln x - x^{\frac{4}{6}} - 12^x)' = \frac{7}{x} - \frac{4}{6}x^{\frac{4}{6}-1} - 12^x \ln 12 = \frac{7}{x} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 12^x \ln 12$

13.20 Calcula estas derivadas.

a)  $[(x^5 - 2x^4)(x^3 - 2x + 5)]'$

b)  $[\ln x(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)]'$

c)  $\left(\frac{2x^4 - 3x}{x^5 - 4x + 3}\right)'$

d)  $\left(\frac{2 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\right)'$

a)  $[(x^5 - 2x^4)(x^3 - 2x + 5)]' = (5x^4 - 8x^3)(x^3 - 2x + 5) + (3x^2 - 2)(x^5 - 2x^4) = 8x^7 - 14x^6 - 12x^5 + 45x^4 - 40x^3$

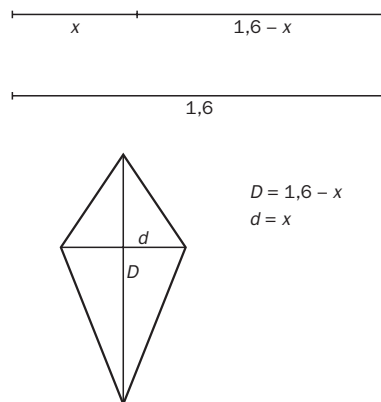
b)  $[\ln x(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)]' = \frac{1}{x}(\cos x - 3 \operatorname{sen} x) + (-\operatorname{sen} x - 3 \cos x)\ln x$

c)  $\left(\frac{2x^4 - 3x}{x^5 - 4x + 3}\right)' = \frac{(8x^3 - 3)(x^5 - 4x + 3) - (5x^4 - 4)(2x^4 - 3x)}{(x^5 - 4x + 3)^2}$

d)  $\left(\frac{2 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{\cos x(1 + \cos x) - (-\operatorname{sen} x)(2 + \operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13.21 Rosa necesita cortar un listón de madera de 1,6 metros en dos partes para construir el armazón de una cometa con forma de rombo. ¿Qué medidas deben tener las partes para que la superficie de la cometa sea máxima?



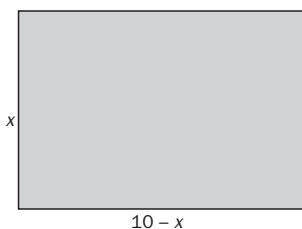
Las diagonales medirán  $x$  y  $1,6 - x$ . El área del rombo será:

$$A(x) = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{(1,6 - x)x}{2} = 0,8x - \frac{x^2}{2}$$

La derivada será:  $A'(x) = 0,8 - x$ , que se anula para  $x = 0,8$  metros.

El rombo de área máxima tiene las dos diagonales iguales, luego en realidad es un cuadrado de  $0,32 \text{ m}^2$  de área.

13.22 Con una cuerda de 20 metros de largo queremos formar un rectángulo atando sus extremos. De todos los rectángulos posibles, ¿cuál será el que tenga mayor área?



Los lados medirán  $x$  y  $10 - x$ . El área será:

$$A(x) = b \cdot h = (10 - x)x = 10x - x^2$$

La derivada será  $A'(x) = 10 - 2x$ , que se anula para  $x = 5$  metros.

La figura de área máxima es un cuadrado.

## ACTIVIDADES

### EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

#### Tasa de variación media. Tasa de variación instantánea

13.23 Halla la tasa de variación media de estas funciones en los intervalos que se indican.

a)  $f(x) = x - 6$ , en  $[0, 2]$

b)  $g(x) = 2x + 5$ , en  $[4, 5]$

c)  $h(x) = x^2 - 4$ , en  $[-1, 0]$

d)  $j(x) = 3 - x$ , en  $[-1, 1]$

$$a) TVM[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$$b) TVM[4, 5] = \frac{g(5) - g(4)}{5 - 4} = \frac{15 - 13}{1} = 2$$

$$c) TVM[-1, 0] = \frac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} = \frac{-4 - (-3)}{1} = -1$$

$$d) TVM[-1, 1] = \frac{j(1) - j(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - 4}{2} = -2$$

13.24 Estudia si las siguientes funciones crecen o decrecen en promedio en el intervalo  $[2, 3]$ .

a)  $y = 3x + 1$

b)  $y = 6 - 5x$

c)  $y = x^2 + 3$

d)  $y = x^2 + x$

e)  $y = 2 - x^2$

f)  $y = x^2 - 6x$

$$a) TVM[2, 3] = \frac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \frac{10 - 7}{1} = 3 \text{ Crece.}$$

$$d) TVM[2, 3] = \frac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \frac{12 - 6}{1} = 6 \text{ Crece.}$$

$$b) TVM[2, 3] = \frac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \frac{-9 - (-4)}{1} = -5 \text{ Decrece.}$$

$$e) TVM[2, 3] = \frac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \frac{-7 - (-2)}{1} = -5 \text{ Decrece.}$$

$$c) TVM[2, 3] = \frac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \frac{12 - 7}{1} = 5 \text{ Crece.}$$

$$f) TVM[2, 3] = \frac{y(3) - y(2)}{3 - 2} = \frac{-9 - (-8)}{1} = -1 \text{ Decrece.}$$

13.25 Calcula la tasa de variación media de la función  $f(x) = -8$  en el intervalo  $[-2, -1]$  y, a partir de ella, describe cómo es su crecimiento.

$$TVM[-2, -1] = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{-8 + 8}{1} = 0. \text{ Es una función constante.}$$

13.26 Identifica cuáles de las siguientes funciones crecen y cuáles decrecen, en promedio, en el intervalo  $[-1, 1]$ .

a)  $f(x) = x^2 - 4x$

b)  $g(x) = 9x - x^3$

c)  $h(x) = -x^2 - 5x - 6$

d)  $m(x) = x^3 + 1$

$$a) TVM[-1, 1] = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-3 - 5}{2} = -4 \text{ Decrece.}$$

$$b) TVM[-1, 1] = \frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)} = \frac{8 - (-8)}{2} = 8 \text{ Crece.}$$

$$c) TVM[-1, 1] = \frac{h(1) - h(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-12 - (-2)}{2} = -5 \text{ Decrece.}$$

$$d) TVM[-1, 1] = \frac{m(1) - m(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - 0}{2} = 1 \text{ Crece.}$$

13.27 Compara el crecimiento medio de estas funciones en el intervalo  $[-2, -1]$ .

a)  $f(x) = 4x + 3$

b)  $g(x) = x^2 - 4x$

a)  $TVM[-2, -1] = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{-1 - (-5)}{1} = 4$  Crece.

b)  $TVM[-2, -1] = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{5 - 12}{1} = -7$  Decrece.

En valor absoluto es mayor la tasa de variación media de la función  $g(x)$ . Por tanto,  $g(x)$  decrece más rápidamente.

13.28 Calcula la tasa de variación instantánea de estas funciones en los siguientes puntos.

a)  $f(x) = 7 + 2x$ , en  $x = 0$  y  $x = 3$

b)  $g(x) = 4 - 3x$ , en  $x = -1$  y  $x = 2$

c)  $h(x) = -x^2$ , en  $x = 1$  y  $x = -2$

a)  $TVI[0] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7+2h-7}{h} = 2$

$TVI[3] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7+6+2h-13}{h} = 2$

b)  $TVI[-1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+3-3h-7}{h} = -3$

$TVI[2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-6-3h+2}{h} = -3$

c)  $TVI[1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1+h) - h(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1-2h-h^2+1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2-h)}{h} = -2$

$TVI[-2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2+h) - h(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(-2+h)^2 - (-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4+4h-h^2+4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4-h)}{h} = 4$

13.29 Halla la tasa de variación instantánea de estas funciones en los puntos  $x = -2$ ,  $x = 1$  y  $x = 4$ .

a)  $y = x^3 + 2x^2$

b)  $y = 3x + 2$

c)  $y = x^2 - 2x + 1$

d)  $y = \frac{1+x}{x}$

a)  $TVI[-2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(-2+h) - y(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^3 + 2(-2+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 4h^2 + h^3}{h} = 4$

$TVI[1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 + 2(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + 5h^2 + h^3}{h} = 7$

$TVI[4] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^3 + 2(4+h)^2 - 96}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{64h + 14h^2 + h^3}{h} = 64$

b)  $TVI[-2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(-2+h) - y(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2+h) + 2 - (-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6 + 3h + 6}{h} = 3$

$TVI[1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h) + 2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h - 3}{h} = 3$

$TVI[4] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4+h) + 2 - 14}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 3h - 12}{h} = 3$

$$c) TVI[-2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(-2+h) - y(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - 2(-2+h) + 1 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{h} = -6$$

$$TVI[1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) + 1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1h^2}{h} = 0$$

$$TVI[4] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 2(4+h) + 1 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = -6$$

$$d) TVI[-2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(-2+h) - y(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1-2+h}{-2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-2+2h+2-h}{-4+2h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(-4+2h)} = \frac{-1}{4}$$

$$TVI[1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+1+h}{1+h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h-2-2h}{1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(1+h)} = -1$$

$$TVI[4] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+4+h}{4+h} - \frac{5}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{20+4h-20-5h}{16+4h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(16+4h)} = \frac{-1}{16}$$

## Derivada en un punto. Recta tangente

13.30 Halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a)  $f(x) = -6$ , en  $x_0 = 4$

b)  $g(x) = 3x + 9$ , en  $x_0 = -2$

c)  $h(x) = x^3$ , en  $x_0 = 0$

d)  $j(x) = 4 + 2x^2$ , en  $x_0 = 0$

$$a) f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6 + 6}{h} = 0$$

$$b) g'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2+h) + 9 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6 + 3h + 6}{h} = 3$$

$$c) h'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(0+h) - h(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 0}{h} = 0$$

$$d) j'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(0+h) - j(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 2h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h = 0$$

13.31 Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos señalados.

a)  $f(x) = \frac{3}{x}$ , en  $x_0 = -6$

b)  $g(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ , en  $x_0 = 0$

$$a) f'(-6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-6+h) - f(-6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{-6+h} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6-6+h}{2(-6+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2h(-6+h)} = \frac{-1}{12}$$

$$b) g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h+1}{2h-1} + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h+1+2h-1}{2h-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(2h-1)} = -3$$



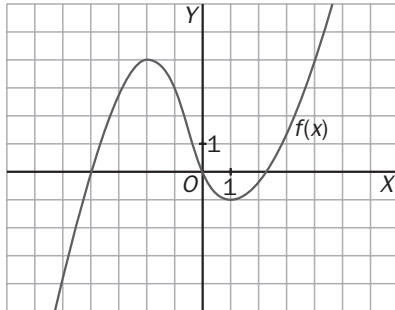
13.32 Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = 3x^2 - x$  en el punto  $x_0 = -2$ .

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - (-2) = 14$$

$$\begin{aligned} m = f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-2+h)^2 - (-2+h) - 14}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 - 12h + 3h^2 + 2 - h - 14}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-13 + 13h)}{h} = -13 \end{aligned}$$

$$\text{Recta tangente: } y - 14 = -13 \cdot (x + 2)$$

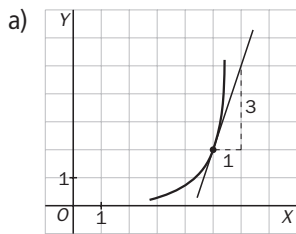
13.33 Observando la gráfica de la función, ¿en qué puntos de la misma la derivada de la función es cero?



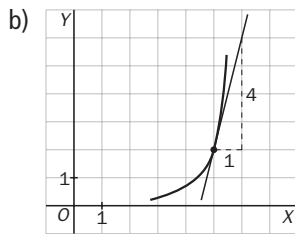
En  $(-2, 4)$  y en  $(1, -1)$ .

13.34 Esboza la gráfica de la función  $f(x)$  en el punto  $x_0 = 5$  en los siguientes supuestos.

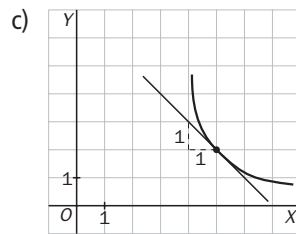
a)  $f'(5) = 3$



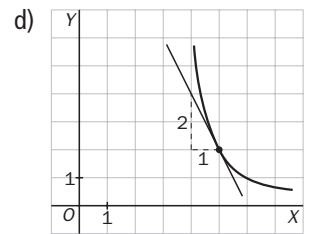
b)  $f'(5) = 4$



c)  $f'(5) = -1$



d)  $f'(5) = -2$



13.35 Halla el ángulo que forma la recta tangente a la curva  $y = 4x^3 + 9x + 2$  en el punto  $x_0 = 3$  con el eje de abscisas.

$$\begin{aligned} y'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(3+h) - y(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(3+h)^3 + 9(3+h) + 2 - 137}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(27 + 27h + 9h^2 + h^3) + 27 + 9h - 135}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{108 + 108h + 36h^2 + 4h^3 - 108 + 9h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4h^2 + 36h + 117)}{h} = 117 \Rightarrow \text{tg } \alpha = 117 \Rightarrow 89^\circ 30' 37'' \end{aligned}$$

13.36 Calcula en qué punto la gráfica de  $f(x) = 2 + 4x^2 - x^4$  corta al eje de ordenadas y halla la recta tangente a la misma en ese punto.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$$

$$m = f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 4h^2 - h^4 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4h - h^3)}{h} = 0.$$

$$\text{Recta tangente: } y - 2 = 0$$

## Derivada de una función

13.37 Calcula, utilizando la definición, la derivada de las funciones siguientes.

a)  $f(x) = 4$

b)  $g(x) = 7x$

c)  $h(x) = 2 - 5x$

d)  $i(x) = x^2 + 5x$

e)  $j(x) = x^4 + 9x^2$

f)  $m(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

$$a) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4}{h} = 0$$

$$b) g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(x+h) - 7x}{h} = 7$$

$$c) h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 5(x+h) - 2 + 5x}{h} = -5$$

$$d) i'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 5(x+h) - x^2 - 5x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 5h}{h} = 2x + 5$$

$$e) j'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 + 9(x+h)^2 - x^4 - 9x^2}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + 18xh + 9h^2}{h} = 4x^3 + 18x$$

$$f) m'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)^2 + 1}{x+h} - \frac{x^2 + 1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx^2 + hx^2 - h}{hx(x+h)} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

13.38 Dada la función  $f(x) = 6x^2 + 2x$ :

a) Usa la definición para hallar su derivada.

b) A partir del resultado anterior, calcula  $f'(0)$ ,  $f'(3)$  y  $f'(-1)$ .

$$a) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 + 2(x+h) - 6x^2 - 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12xh + 6h^2 + 2h}{h} = 12x + 2$$

$$b) f'(0) = 2 \quad f'(3) = 38 \quad f'(-1) = -10$$

## Derivada de funciones elementales y operaciones

13.39 Halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a)  $f(x) = x^2 - 5$ , en  $x_0 = 0$

b)  $g(x) = x^2 + 6x - 2$ , en  $x_0 = -1$

c)  $h(x) = x^3 - x + 3$ , en  $x_0 = 1$

d)  $j(x) = 4x - x^2$ , en  $x_0 = 2$

a)  $f'(x) = 2x$ ;  $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

b)  $g'(x) = 2x + 6$ ;  $g'(-1) = 2 \cdot (-1) + 6 = 4$

c)  $h'(x) = 3x^2 - 1$ ;  $h'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$

d)  $j'(x) = 4 - 2x$ ;  $j'(2) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$

13.40 Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a)  $y = 3x^5 - 6x^3 + 2x - 9$

b)  $y = 4 \ln x + 5e^x$

c)  $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 8x - 7$

a)  $y' = 15x^4 - 18x^2 + 2$

b)  $y' = \frac{4}{x} + 5e^x$

c)  $y' = x^3 + 3x + 8$

d)  $y = \sqrt{x} - \frac{1}{5}x + \frac{9}{8}$

e)  $y = 2 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{cos} x$

f)  $y = \sqrt[4]{x} - 6x^{-2} + 5\sqrt[3]{x}$

d)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{5}$

e)  $y' = 2 \operatorname{cos} x + 3 \operatorname{sen} x$

f)  $y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 12x^{-3} + \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{12}{x^3} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

13.41 Calcula  $f'(2)$ ,  $f'(-3)$ ,  $f'(7)$  y  $f'(-4)$  obteniendo previamente la derivada de  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ .

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2)$

$f'(2) = e^2 \cdot (4 + 4) = 8e^2$

$f'(7) = e^7 \cdot (14 + 49) = 63e^7$

$f'(-3) = e^{-3} \cdot (-6 + 9) = 3e^{-3}$

$f'(-4) = e^{-4} \cdot (-8 + 16) = 8e^{-4}$

13.42 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a)  $y = (4x + 2) \cdot e^x$

b)  $y = (x^3 - 7x^2) \cdot \ln x$

c)  $y = \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{sen} x$

a)  $y' = 4 \cdot e^x + e^x \cdot (4x + 2)$

b)  $y' = (3x^2 - 14x) \cdot \ln x + \frac{x^3 - 7x^2}{x}$

c)  $y' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \cdot \operatorname{sen} x + \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{cos} x$

d)  $y = \frac{x - 1}{2x + 3}$

e)  $y = \frac{x^2}{2x + 5}$

f)  $y = \frac{4x + 6}{3 - x}$

d)  $y' = \frac{2x + 3 - (x - 1) \cdot 2}{(2x + 3)^2} = \frac{5}{(2x + 3)^2}$

e)  $y' = \frac{2x(2x + 5) - 2x^2}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x}{(2x + 5)^2}$

f)  $y' = \frac{4(3 - x) + 4x + 6}{(3 - x)^2} = \frac{18}{(3 - x)^2}$

13.43 Obtén la ecuación de la recta tangente a la función  $f(x) = \frac{x^2 - 5}{4x}$  en el punto  $x_0 = -5$ .

$f'(x) = \frac{8x^2 - 4(x^2 - 5)}{16x^2} = \frac{4x^2 + 20}{16x^2} \Rightarrow m = f'(-5) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$

$f(-5) = \frac{(-5)^2 - 5}{4(-5)} = -1$

Recta tangente:  $y + 1 = \frac{3}{10} \cdot (x + 5) \Rightarrow y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{2}$

13.44 La ecuación de la recta tangente a una curva es  $y - 5 = 3 \cdot (x + 1)$ .

a) ¿Cuál es el punto de tangencia?

b) ¿Y la derivada de la función en ese punto?

a)  $(-1, 5)$

b)  $f'(-1) = 3$

13.45 Comprueba que la pendiente de la recta tangente a las curvas  $f(x) = 2x^2 + x$  y  $g(x) = x$  en  $x_0 = 0$  es la misma.

$$f'(x) = 4x + 1; f'(0) = 1 \quad g'(x) = 1; g'(0) = 1$$

13.46 Considera la función  $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x + 5$ .

a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa 2.

b) Encuentra otro punto de esa curva en el que la recta tangente sea paralela a la obtenida en el apartado anterior.

$$a) f'(x) = 2x^2 - 3x - 2 \quad f'(2) = 8 - 6 - 2 = 0$$

$$f(2) = \frac{16}{3} - 6 - 4 + 5 = \frac{16}{3} - 5 = \frac{1}{3}. \text{ Recta tangente: } y - \frac{1}{3} = 0; y = \frac{1}{3}$$

$$b) m = f'(a) = 2a^2 - 3a - 2 = 0; a = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}; a = 2 \text{ y } a = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{133}{24}\right)$$

13.47 Halla la ecuación de las rectas tangentes a la curva  $y = 2x^2 - 24x$  en los puntos en los que esta corta al eje de abscisas.

$$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 2x(x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 12$$

$$y' = 4x - 24; y'(0) = -24; y'(12) = 24$$

$$\text{Rectas tangentes: } y = -24x; y = 24 \cdot (x - 12)$$

13.48 Halla la derivada de las siguientes funciones.

$$a) y = \frac{x^9}{5} - \frac{x^6}{3} + \frac{2x^2}{8} + \frac{4}{7}$$

$$b) y = 3\sqrt[4]{x} - \frac{\sqrt{x}}{5} + \sqrt{10}$$

$$a) y' = \frac{9x^8}{5} - 2x^5 + \frac{x}{2}$$

$$b) y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{10\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{10\sqrt{x}}$$

13.49 Calcula la derivada de estas funciones.

$$a) y = \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{7}{8x^3} + 3x$$

$$e) y = 2^x \cdot x^2 + 2x$$

$$h) y = (x^{-4} - 6x^{-1}) \cdot \ln x$$

$$b) y = \frac{7}{x^3 - 4x^2 + 6x + 2}$$

$$f) y = \frac{5 \ln x - 7}{1 - x^2}$$

$$i) y = \frac{1}{x} - x^6 \cdot 6^x$$

$$c) y = \sin x \cdot \cos x$$

$$g) y = \frac{3 \sin x - 1}{\cos x}$$

$$j) y = (2x^4 - 6x + 9) \cdot 3^x$$

$$d) y = \frac{9x^3 - 1}{3^x}$$

$$a) y' = -2x^{-2} - 10x^{-3} - \frac{21}{8}x^{-4} + 3 = \frac{-2}{x^2} - \frac{10}{x^3} - \frac{21}{8x^4} + 3$$

$$b) y' = \frac{-21x^2 + 56x - 42}{(x^3 - 4x^2 + 6x + 2)^2}$$

$$c) y' = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$d) y' = \frac{27x^2 \cdot 3^x - (9x^3 - 1) \cdot 3^x \cdot \ln 3}{(3^x)^2}$$

$$e) y' = 2^x \cdot (\ln 2 \cdot x^2 + 2x) + 2$$

$$f) y' = \frac{\frac{5 - 5x^2}{x} + 2x(5 \ln x - 7)}{(1 - x^2)^2}$$

$$g) y' = \frac{3 \cos^2 x + (3 \sin x - 1) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{3 - \sin x}{\cos^2 x}$$

$$h) y' = (-4x^{-5} + 6x^{-2}) \cdot \ln x + x^{-5} - 6x^{-2}$$

$$i) -\frac{1}{x^2} - (6x^5 \cdot 6^x + x^6 \cdot 6^x \cdot \ln 6)$$

$$j) y' = 3^x \cdot [(8x^3 - 6) + (2x^4 - 6x + 9) \cdot \ln 3]$$

- 13.50 Si la tasa de variación media de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[3, 4]$  es 6 y la de otra función  $g(x)$  en el mismo intervalo es  $-6$ , ¿cuál de ellas crece o decrece más rápidamente en media?

Las dos crecen y decrecen con la misma rapidez.

- 13.51 La tasa de variación instantánea de una función  $g(x)$  en el punto  $x = 4$  es 7. ¿Cuál es la derivada de esa función en  $x_0 = 4$ ?

- a) 4                                      b) 3                                      c) 7                                      d) 28

$$f'(4) = 7$$

- 13.52 Si la recta tangente a una curva  $f(x)$  en un punto es  $y - 9 = -2 \cdot (x + 3)$ , ¿cuánto vale  $f'(-3)$ ?

$$f'(-3) = -2$$

- 13.53 La pendiente de la recta tangente a la curva  $f(x)$  en el punto  $(-1, -5)$  es 2 y  $f'(9) = 2$ . ¿Qué se puede decir de las rectas tangentes a  $f(x)$  en los puntos  $x = -1$  y  $x = 9$ ?

Que son paralelas.

- 13.54 Escribe tres funciones cuya derivada sea 2.

- a) ¿En qué se diferencian esas funciones?  
b) ¿Cuántas funciones tienen su derivada igual a 2?

$$f(x) = 2x \qquad f(x) = 2x + 1 \qquad f(x) = 2x + 9$$

- a) En la constante.  
b) Infinitas.

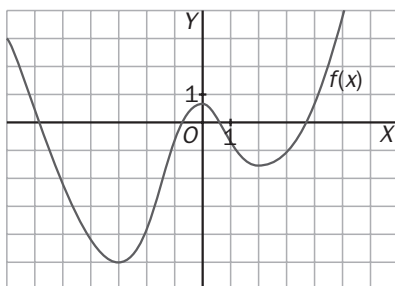
- 13.55 El dominio de una función racional es  $\mathbb{R} - \{3\}$ . ¿Tiene derivada en  $x_0 = 3$ ? Razona tu respuesta.

No, porque al hacer la derivada, en el denominador aparece el que tenía la función elevado al cuadrado y, por tanto, su dominio sería el mismo.

- 13.56 Explica si es posible que una función tenga el mismo valor de su derivada en dos puntos distintos. En caso afirmativo, pon un ejemplo que lo confirme.

Sí es posible:  $f(x) = x$ . La derivada es 1 en todos los números reales.

- 13.57 Observa la gráfica e indica si las siguientes derivadas en un punto son positivas, negativas o nulas.



- a)  $f'(-3)$                               c)  $f'(4)$                               e)  $f'(-2)$   
b)  $f'(-4)$                               d)  $f'(2)$                               f)  $f'(0)$

Son positivas:  $f'(4)$  y  $f'(-2)$ .  
Es negativa:  $f'(-4)$ .  
Son nulas:  $f'(-3)$ ,  $f'(0)$  y  $f'(2)$ .

- 13.58 Teniendo en cuenta la derivada de la función exponencial  $a^x$ , ¿cómo se llega a la conclusión de que  $(e^x)' = e^x$ ?

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x.$$

13.59 En un tramo de una prueba ciclista, la velocidad del ganador, en kilómetros por minuto, ha seguido la función  $v(t) = 0,8t - 0,2t^2$ , siendo  $t$  el tiempo en minutos. La aceleración media es la tasa de variación media de la velocidad, y la aceleración instantánea, la derivada de la velocidad.

- a) ¿Cuál ha sido la aceleración media en el período  $[1, 2]$ , es decir, durante el segundo minuto? ¿Y durante el cuarto minuto?  
 b) ¿En cuál de ellos ha crecido o decrecido más rápidamente la velocidad?  
 c) Halla la aceleración en el instante  $t = 0$ , a los 2 y a los 4 minutos.

$$a) VM[1, 2] = \frac{v(2) - v(1)}{2 - 1} = \frac{0,8 - 0,6}{1} = 0,2$$

$$VM[3, 4] = \frac{v(4) - v(3)}{4 - 3} = \frac{0 - 0,6}{1} = -0,6$$

b)  $|0,2| < |-0,6|$ . Ha decrecido más rápidamente en el segundo intervalo.

$$c) a(t) = 0,8 - 0,4t$$

$$a(0) = 0,8 - 0,4 \cdot 0 = 0,8 \quad a(2) = 0,8 - 0,4 \cdot 2 = 0 \quad a(4) = 0,8 - 0,4 \cdot 4 = -0,8$$

13.60 El número de habitantes de una ciudad (en miles), en función del tiempo,  $t$ , en años es:

$$N(t) = 10 + 6t - t^2$$

- a) Halla la tasa de variación media de la población en los intervalos  $[1, 2]$  y  $[4, 5]$ .  
 b) ¿Cómo ha sido su crecimiento medio en los dos intervalos anteriores? ¿En cuál de los dos ha crecido o decrecido más rápidamente?  
 c) Calcula la tasa de variación instantánea de la población en  $t = 3$  y  $t = 6$ .

$$a) TVM[1, 2] = \frac{N(2) - N(1)}{2 - 1} = \frac{18 - 15}{1} = 3$$

$$TVM[4, 5] = \frac{N(5) - N(4)}{5 - 4} = \frac{15 - 18}{1} = -3$$

b) Entre los años 1 y 2 ha crecido, y entre los años 4 y 5 ha decrecido.

En los dos intervalos ha variado al mismo ritmo.

$$c) TVI[3] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(3+h) - N(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10 + 6(3+h) - (3+h)^2 - 19}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$TVI[6] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(6+h) - N(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10 + 6(6+h) - (6+h)^2 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h - h^2}{h} = -6$$

13.61 Una de las curvas de un circuito de fórmula 1 tiene la forma de la gráfica de esta función.

$$y = x^3 - 3x + 4, \text{ con } 0 \leq x \leq 2$$

Al llegar al punto de la curva en el que la abscisa es  $x = 0,5$ , uno de los vehículos se ha salido del trazado y ha seguido la trayectoria de la tangente a la curva en ese punto.

Escribe la ecuación de dicha trayectoria.

$$y(0,5) = 2,625. \quad y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(0,5) = 3 \cdot 0,5^2 - 3 = -2,25.$$

$$\text{Trayectoria: } y - 2,625 = -2,25 \cdot (x - 0,5)$$

13.62 Una comunidad autónoma viene publicando un boletín sobre comercio justo. Su tirada ha variado según la fórmula  $f(t) = 20t^2 + 8t + 5000$ , donde  $t$  se expresa en años.

- a) Calcula el crecimiento medio de la tirada en el primer año y entre los años quinto y sexto. ¿En cuál de los dos períodos ha sido más rápido?  
 b) Halla el crecimiento del número de ejemplares distribuidos justo en el décimo año.

$$a) TVM[0, 1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{5028 - 5000}{1} = 28 \quad TVM[5, 6] = \frac{f(6) - f(5)}{1 - 0} = \frac{5768 - 5540}{1} = 228$$

El crecimiento ha sido más rápido entre el quinto y el sexto año.

$$b) TVI[10] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20 \cdot (10+h)^2 + 8 \cdot (10+h) + 5000 - 7080}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(408 + 20h)}{h} = 408$$

13.63 La contaminación lumínica dificulta algunas actividades como las observaciones astronómicas.

Para medir el brillo del cielo respecto al brillo natural en un determinado emplazamiento,  $I$ , se utiliza la fórmula  $I = 1200 \cdot r^{-2,5}$ , siendo  $r$  la distancia en kilómetros del lugar de observación al centro urbano más próximo.

Calcula la velocidad media de variación del brillo entre dos lugares situados a 90 y 95 kilómetros del centro urbano. ¿Crece o decrece el brillo?

$$TVM[90, 95] = \frac{I(95) - I(90)}{95 - 90} = \frac{0,0136 - 0,0156}{5} = -0,0004.$$

Decrece.

13.64 El índice de masa corporal (IMC) es una magnitud que ayuda a valorar si la alimentación y el desarrollo de una persona son adecuados. Se obtiene dividiendo el peso de una persona, en kilogramos, entre el cuadrado de su estatura,  $h$ , en metros.

Se está realizando un estudio nutricional de un grupo de adolescentes que pesan 50 kilogramos. En ellos, el IMC sigue la función  $y(h) = \frac{50}{h^2}$ .

a) Estudia si el índice de masa corporal es creciente o decreciente en el intervalo  $[1,50; 1,60]$ .

b) Describe por escrito lo que significa el resultado anterior.

c) ¿Existe algún valor de la altura para el que la variación del índice de masa corporal sea nula?

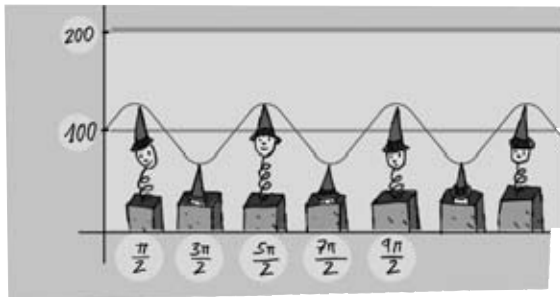
$$a) TVM[1,50; 1,60] = \frac{IMC(1,60) - IMC(1,50)}{1,60 - 1,50} = \frac{19,53 - 22,22}{0,10} = -26,9.$$

Decrece.

b) A medida que aumenta la altura de los adolescentes, el IMC disminuye.

c) No, la función no se anula nunca.

13.65 El hermanito de Andrés tiene un muñeco que oscila arriba y abajo sujeto a un muelle. Su altura en centímetros se corresponde con la función  $y(t) = 100 + 30 \sin t$ , con  $t$  en segundos.



a) Halla la velocidad media del muñeco en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  segundos.

b) Estudia, en promedio, el crecimiento y decrecimiento de la altura en los intervalos  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  y  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

c) Calcula la velocidad del muñeco en los instantes  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{4}$  y  $t = \pi$  segundos.

$$a) TVM\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \frac{y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y(0)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{130 - 100}{\frac{\pi}{2}} = \frac{60}{\pi}$$

$$b) TVM\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = \frac{60}{\pi}. \text{ Crece.}$$

$$TVM\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] = \frac{y(\pi) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{100 - 130}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-60}{\pi}. \text{ Decrece.}$$

$$c) y'(t) = 30 \cos t$$

$$y'(0) = 30 \cos 0 = 30$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 30 \cos \frac{\pi}{4} = 15\sqrt{2}$$

$$y'(\pi) = 30 \cos \pi = -30.$$

Tasa de variación media. Tasa de variación instantánea

13.66 Calcula la tasa de variación media de estas funciones en los intervalos que se indican.

a)  $f(x) = 2x + 4$ , en  $[-2, -1]$

c)  $h(x) = x^3 + 3x^2 - 8$ , en  $[1, 2]$

b)  $g(x) = 2x^4 - 6x^2$ , en  $[-1, 0]$

d)  $m(x) = x + \frac{1}{x}$ , en  $[2, 3]$

a)  $TVM[-2, -1] = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{2 - (-4)}{1} = 6$

b)  $TVM[-1, 0] = \frac{g(0) - g(-1)}{0 + 1} = \frac{0 + 4}{1} = 4$

c)  $TVM[1, 2] = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \frac{12 + 4}{1} = 16$

d)  $TVM[2, 3] = \frac{m(3) - m(2)}{3 - 2} = \frac{3 + \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2}}{1} = \frac{5}{6}$

13.67 Estudia el crecimiento medio de las siguientes funciones en el intervalo  $[4, 5]$ .

a)  $f(x) = 1 - 2x^3$

b)  $g(x) = 3x^2 + x - 2$

a)  $TVM[4, 5] = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{-249 + 127}{1} = -122$ .

Decrece.

b)  $TVM[1, 2] = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} - 1 = \frac{78 - 50}{1} = 28$ .

Crece.

13.68 Halla la tasa de variación instantánea de las funciones siguientes en  $x_0 = 3$ .

a)  $f(x) = 7x + 9$

c)  $h(x) = 2x^2 - 5$

b)  $g(x) = -1$

d)  $i(x) = 4x + x^2$

a)  $TVI[3] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(3+h) + 9 - 30}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h}{h} = 7$

b)  $TVI[3] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + 1}{h} = 0$

c)  $TVI[3] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3+h) - h(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 - 5 - 13}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 2h^2}{h} = 12$

d)  $TVI[3] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i(3+h) - i(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(3+h) + (3+h)^2 - 21}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + h^2}{h} = 10$

Derivada en un punto. Recta tangente

13.69 Utiliza la definición de derivada en un punto para calcular estas cantidades.

a)  $f'(2)$ , si  $f(x) = 6 - 4x$

c)  $h'(-1)$ , si  $h(x) = x^3 - x$

b)  $g'(0)$ , si  $g(x) = 3x + 2x^2$

d)  $i'(1)$ , si  $i(x) = 5 - 2x$

a)  $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 4(2+h) + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{h} = -4$

b)  $g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 2h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3 + 2h)}{h} = 3$

c)  $h'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-1+h) - h(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^3 - (-1+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 3h^2 + h^3}{h} = 2$

d)  $i'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i(1+h) - i(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 2(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2$



13.70 Comprueba que el valor de la derivada de la función  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 1$  es el mismo en  $x_0 = 0$  y  $x_0 = 2$ .

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^3 - 6h^2 + h - 1 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h^2 - 6h + 1)}{h} = 1$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^3 - 6(2+h)^2 + 2+h-1+7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+6h^2+2h^3}{h} = 1$$

13.71 Halla la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = 2x - 4x^2$  en estos puntos.

a)  $x_0 = 4$

b)  $x_0 = 0$

c)  $x_0 = -3$

a)  $f(4) = -56$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4+h) - 4(4+h)^2 + 56}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-30h - 4h^2}{h} = -30$$

Recta tangente:  $y + 56 = -30(x - 4)$

b)  $f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 4h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2 - 4h)}{h} = 2$$

Recta tangente:  $y = 2 \cdot x$

c)  $f(-3) = -42$

$$f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-3+h) - 4(-3+h)^2 + 42}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{26h - 4h^2}{h} = 26$$

Recta tangente:  $y + 42 = 26(x + 3)$

## Derivada de funciones elementales y operaciones

13.72 Obtén la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos que se indican.

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ , en  $x_0 = 2$

b)  $g(x) = 3x^2 - 3$ , en  $x_0 = -1$

c)  $h(x) = x^3 - x + 4$ , en  $x_0 = 0$

a)  $f(2) = 9$

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(2) = 6$$

Recta tangente:  $y - 9 = 6(x - 2)$

b)  $g(-1) = 0$

$$g'(x) = 6x$$

$$g'(-1) = -6$$

Recta tangente:  $y = -6(x + 1)$

c)  $h(0) = 4$

$$h'(x) = 3x^2 - 1$$

$$h'(0) = -1$$

Recta tangente:  $y - 4 = -x$

13.73 Calcula la derivada de estas funciones.

a)  $y = 2x^3 - 6x^2 + x$

b)  $y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

c)  $y = x^{-1} + 2x^{-3}$

d)  $y = \frac{3}{4}x^{-4} - \frac{5}{2}x^{-2} + \frac{7}{9}$

e)  $y = \sqrt[8]{x} - 3\sqrt{x}$

f)  $y = 9x + 6x^{-1} + 3$

a)  $y' = 6x^2 - 12x$

b)  $y' = 2x^4 - x^2 + x$

c)  $y' = -x^{-2} - 6x^{-4}$

d)  $y' = -3x^{-5} + 5x^{-3}$

e)  $y' = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

f)  $y' = 9 - 6x^{-2}$

g)  $y = \frac{1}{4}\sqrt[3]{x}$

h)  $y = 5x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{4}{7}}$

i)  $y = 2x - 4 \ln x$

j)  $y = 3 \cdot 7^x + 9^x$

k)  $y = 5 \cos x + 2$

l)  $y = 3x - 4 \operatorname{sen} x$

g)  $y' = \frac{1}{12}x^{-\frac{2}{3}}$

h)  $y' = \frac{40}{4}x^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}}$

i)  $y' = 2 - \frac{4}{x}$

j)  $y' = 3 \cdot 7^x \cdot \ln 7 + 9^x \cdot \ln 9$

k)  $y' = -5 \operatorname{sen} x$

l)  $y' = 3 - 4 \cos x$

13.74 Halla la derivada de los siguientes productos y cocientes de funciones.

a)  $y = x^2 \cdot \ln x$

b)  $y = (4x - 1) \cdot \operatorname{sen} x$

c)  $y = \frac{6x}{1 - 2x}$

a)  $y' = 2x \cdot \ln x + x$

b)  $y' = 4 \operatorname{sen} x + (4x - 1) \cdot \cos x$

c)  $y' = \frac{6(1 - 2x) - 6x \cdot (-2)}{(1 - 2x)^2} = \frac{6}{(1 - 2x)^2}$

d)  $y' = (6x - 1) \cdot e^x + (3x^2 - x) \cdot e^x = e^x \cdot (3x^2 + 5x - 1)$

e)  $y' = \frac{4x - (4x + 3) \cdot 1}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$

f)  $y' = \frac{2x(3x + 2) - x^2 \cdot 3}{(3x + 2)^2} = \frac{3x^2 + 4x}{(3x + 2)^2}$

d)  $y = (3x^2 - x) \cdot e^x$

e)  $y = \frac{4x + 3}{x}$

f)  $y = \frac{x^2}{3x + 2}$

### AMPLIACIÓN

13.75 Si la derivada de una función  $f(x)$  es una constante, esto es,  $f'(x) = k$ , ¿cómo es la función?

$f(x) = kx + b$ . Es una función lineal.

13.76 Comprueba que la tasa de variación instantánea de la función  $f(x) = x^5$  es la misma en los valores de  $x$  opuestos entre sí.

$$\begin{aligned} TVI[x] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} = 5x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVI[-x] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-x+h)^5 - (-x)^5}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^5 + 5x^4h - 10x^3h^2 + 10x^2h^3 - 5xh^4 + h^5 + x^5}{h} = 5x^4 \end{aligned}$$

13.77 Utilizando la definición, calcula la derivada de estas funciones.

a)  $f(x) = \sqrt{x}$

b)  $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{(x+h)^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{(x+h)^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2})}{h(\sqrt{(x+h)^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2 + 2)}{h(\sqrt{(x+h)^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2}{h(\sqrt{x^2 + 2xh + h^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2})} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \end{aligned}$$

13.78 ¿En qué puntos de la curva  $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$  la recta tangente tiene pendiente  $-2$ ?

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x(x-1) - (x^2 + 2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = -2(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

13.79 Halla los puntos de la curva  $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$  en los que las rectas tangentes a la misma forman un ángulo de  $45^\circ$  con el eje de abscisas.

$$f'(x) = m = \operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$f(-2 + \sqrt{3}) = \frac{2(-2 + \sqrt{3}) + 1}{-2 + \sqrt{3} + 2} = \frac{-4 + 2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$f(-2 - \sqrt{3}) = \frac{2(-2 - \sqrt{3}) + 1}{-2 - \sqrt{3} + 2} = \frac{-4 - 2\sqrt{3} + 1}{-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Los puntos buscados son  $(-2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$  y  $(-2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ .

13.80 Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^3 - x^2 - x - 4$  en el punto de ordenada  $-2$ .

$$y = -2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 4 = -2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

$$y'(2) = 7$$

Recta tangente:  $y + 2 = 7(x - 2)$

13.81 Calcula la derivada de estas funciones.

a)  $y = (\ln 3)x + 3 \ln x$

b)  $y = ex^2 + 4^x \cdot e^x$

c)  $y = \frac{x \cdot e^x}{x^2 - 1}$

d)  $y = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^3 + 2}$

e)  $y = \frac{1}{6}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f)  $y = x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$

g)  $y = \frac{(x^3 - 2x) \cdot \ln x}{e^x + 2}$

h)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

a)  $y' = \ln 3 + \frac{3}{x}$

b)  $y' = 2ex + 4^x \cdot \ln 4 \cdot e^x + 4^x \cdot e^x$

c)  $y' = \frac{(e^x + x \cdot e^x)(x^2 - 1) - x \cdot e^x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$

d)  $y' = \frac{(4x^3 - 4x)(3x^3 + 2) - (x^4 - 2x^2 + 1) \cdot 9x^2}{(3x^3 + 2)^2}$

e)  $y' = \frac{1}{36}x^{-\frac{5}{6}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{36\sqrt[6]{x^5}} + \frac{3}{4\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

f)  $y' = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x + x \operatorname{cos}^2 x - x \operatorname{sen}^2 x$

g)  $y' = \frac{[(3x^2 - 2)\ln x + (x^2 - 2)](e^x + 2) - (x^3 - 2x)\ln x \cdot e^x}{(e^x + 2)^2}$

h)  $y' = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$

13.82 Encuentra el valor de los términos desconocidos en la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$  si se cumplen estas tres condiciones.

$f(0) = 5 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 3$

(La derivada segunda,  $f''$ , es la función que se obtiene al calcular la derivada de la derivada de  $f$ .)

$f'(x) = 2ax + b$

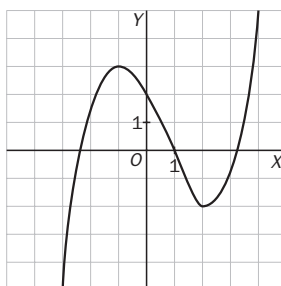
$f''(x) = 2a$

$f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$

$f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$f''(0) = 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

13.83 Dibuja una función con derivada nula en  $x = -1$  y  $x = 2$ , derivada positiva en los puntos de los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(2, +\infty)$ , y derivada negativa en el intervalo  $(-1, 2)$ .



13.84 El cultivo de bacterias

En el laboratorio de un hospital han analizado la evolución de un cultivo de bacterias al aplicarle un antibiótico, obteniendo estos datos.

- El número inicial de bacterias fue de 600.
- Al sexto día no quedaba ninguna.
- El número máximo de patógenos se alcanzó a las 60 horas.

a) Halla los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  que permiten ajustar los datos anteriores a este tipo de función.

$$N(t) = at^2 + bt + c$$

Donde  $N(t)$  es el número de bacterias cuando han transcurrido  $t$  días.

b) Calcula el número máximo de bacterias.

c) Estudia si el número de patógenos estaba creciendo más deprisa cuando había pasado un día o cuando habían transcurrido dos.

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow N(t) = 600 \Rightarrow c = 600 \\ t = 6 \Rightarrow N(t) = 0 \Rightarrow 36a + 6b + 600 = 0 \\ t = \frac{60}{24} = 2,5 \Rightarrow N'(t) = 2at + b = 0 \Rightarrow 5a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -100 \\ b = 500 \\ c = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow N(t) = -100t^2 + 500t + 600$$

b)  $N(t) = -100 \cdot 2,5^2 + 500 \cdot 2,5 + 600 = 1225$

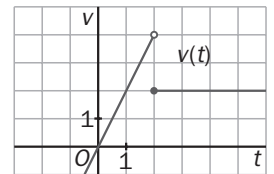
c)  $N'(t) = -200t + 500 \Rightarrow \begin{cases} N'(1) = 300 \\ N'(2) = 100 \end{cases}$

El número de bacterias crecía más deprisa cuando había pasado un día.

13.85 Gráfica de la velocidad

La gráfica de la derecha representa la velocidad de un vehículo,  $v$ , en función del tiempo,  $t$ , para  $t \geq 0$ .

La función velocidad es la derivada de la función  $e(t)$  que nos da el espacio recorrido por el vehículo.



a) ¿Cuál de las siguientes expresiones es la ecuación de  $v(t)$ ?

A)  $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t < 2 \\ 2 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

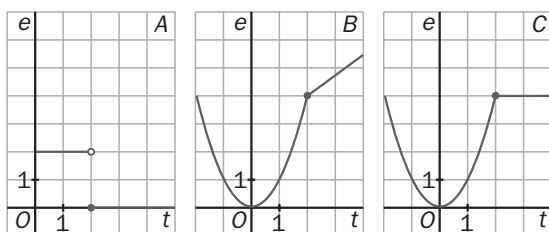
B)  $v(t) = \begin{cases} -2t & \text{si } t < 2 \\ 2 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

b) ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de  $e(t)$ ?

A)  $e(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t < 2 \\ t & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

B)  $e(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t < 2 \\ 2t & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

c) ¿Cuál de estas gráficas representa a  $e(t)$ ?



a) La A

b) La B

c) La B

**13.A1** Halla la tasa de variación media de estas funciones en los intervalos que se indican.

a)  $f(x) = 8 - 3x$ , en  $[-2, -1]$

b)  $g(x) = 2x^2 + x$ , en  $[3, 4]$

c)  $h(x) = x^2 + 5x - 1$ , en  $[-1, 0]$

$$a) TVM[-2, -1] = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 + 2} = \frac{11 - 14}{1} = -3$$

$$b) TVM[3, 4] = \frac{g(4) - g(3)}{4 - 3} = \frac{36 - 21}{1} = 15$$

$$c) TVM[-1, 0] = \frac{h(0) - h(-1)}{0 + 1} = \frac{-1 + 5}{1} = 4$$

**13.A2** Calcula la tasa de variación instantánea de estas funciones en los puntos señalados.

a)  $f(x) = x^3 + 6x$ , en  $x_0 = 2$

b)  $g(x) = 2x + 5x^2$ , en  $x_0 = -1$

c)  $h(x) = 4x^2 - 2x^3$ , en  $x_0 = -3$

$$a) TVI[2] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 + 6(2+h) - 20}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 + 12 + 6h - 20}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(18 + 6h + h^2)}{h} = 18$$

$$b) TVI[-1] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-1+h) + 5(-1+h)^2 - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 + 2h + 5 - 10h + 5h^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-8 + 5h)}{h} = -8$$

$$c) TVI[-3] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-3+h) - h(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(-3+h)^2 - 2(-3+h)^3 - 90}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{36 - 24h + 4h^2 + 54 - 54h + 18h^2 - 2h^3 - 90}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-78 + 22h - 2h^2)}{h} = -78$$

**13.A3** Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, halla  $y'(4)$  para las siguientes funciones.

a)  $y(x) = 6 - 8x$

c)  $y(x) = 3x^2 + 2x - 7$

b)  $y(x) = \frac{2}{3x + 6}$

d)  $y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

$$a) y'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 8(4+h) + 26}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8h}{h} = -8$$

$$b) y'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3(4+h)+6} - \frac{1}{9}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3(h+6)} - \frac{1}{9}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6-h-6}{9(h+6)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{9h(h+6)} = \frac{-1}{54}$$

$$c) y'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4+h)^2 + 2(4+h) - 7 - 49}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{48 + 24h + 3h^2 + 8 + 2h - 56}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h + 26)}{h} = 26$$

$$d) y'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4+h}{3} - \frac{1}{2} - \frac{5}{6}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{8+2h-3-5}{6}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$$

13.A4 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a)  $y = 3x^6 + 8x^5 - 4x^4 - 6x$

b)  $y = 2x^{-1} + 5x^{-3} - 3$

c)  $y = \frac{3\sqrt[4]{x}}{4} - 6\sqrt[5]{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

a)  $y' = 18x^5 + 40x^4 - 16x^3 - 6$

b)  $y' = -2x^{-2} - 15x^{-4} = \frac{-2}{x^2} - \frac{15}{x^4}$

c)  $y' = \frac{3x^{-\frac{3}{4}}}{16} - \frac{6x^{-\frac{4}{5}}}{5} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{4} = \frac{3}{16\sqrt[4]{x^3}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}$

13.A5 Calcula la ecuación de la recta tangente a las gráficas de estas funciones en los puntos citados.

a)  $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$ , en  $x_0 = 0$

b)  $g(x) = 8x - 7$ , en  $x_0 = -5$

c)  $h(x) = 2x^4 + 4x^2 + 1$ , en  $x_0 = 2$

d)  $m(x) = \frac{1}{2-x}$ , en  $x_0 = 1$

a)  $f(0) = 3$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h^2 - 6h + 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(9h - 6)}{h} = -6$$

Recta tangente:  $y - 3 = -6x$

b)  $g(-5) = -47$

$$g'(-5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-5+h) - g(-5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(-5+h) - 7 + 47}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h}{h} = 8$$

Recta tangente:  $y + 47 = 8 \cdot (x + 5)$

c)  $h(2) = 49$

$$h'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h) - h(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^4 + 4(2+h)^2 + 1 - 49}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(80 + 52h + 16h^2 + 8h^3)}{h} = 80$$

Recta tangente:  $y - 49 = 80 \cdot (x - 2)$

d)  $m(1) = 1$

$$m'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(1+h) - m(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2-(1+h)} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1-1+h}{1-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(1-h)} = 1$$

Recta tangente:  $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$

13.A6 Halla la derivada de las siguientes funciones y después particulariza su valor en los puntos indicados.

a)  $f(x) = 9x^3 + 3x^2 - 6x - 2$ , en  $x_0 = 3$

b)  $g(x) = 5 - 2x + x^3 + 4x^4$ , en  $x_0 = 1$

c)  $h(x) = 4^x \cdot (x^2 + 2)$ , en  $x_0 = 0$

d)  $m(x) = \frac{3 - 2x^2}{5x + 4}$ , en  $x_0 = -2$

a)  $f'(x) = 27x^2 + 6x - 6 \Rightarrow f'(3) = 255$

b)  $g'(x) = -2 + 3x^2 + 16x^3 \Rightarrow g'(1) = 17$

c)  $h'(x) = 4^x \cdot \ln 4(x^2 + 2) + 2x \cdot 4^x \Rightarrow h'(0) = 2 \cdot \ln 4$

d)  $m'(x) = \frac{-4x(5x+4) - (3-2x^2) \cdot 5}{(5x+4)^2} = \frac{-10x^2 - 16x - 15}{(5x+4)^2} \Rightarrow m'(-2) = \frac{-40 + 32 - 15}{(-6)^2} = -\frac{33}{36}$

13.A7 Calcula la derivada de estas funciones.

a)  $y = 7x \cdot e^x$

b)  $y = (x - 2) \cdot \ln x$

c)  $y = \frac{2x + 4}{x^2 - 1}$

a)  $y' = 7e^x \cdot (1 + x)$

b)  $y' = \ln x + \frac{x - 2}{x}$

c)  $y' = \frac{2(x^2 - 1) - (2x + 4) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 8x - 2}{(x^2 - 1)^2}$

d)  $y' = \frac{-2x(1 + 4x) - (3 - x^2) \cdot 4}{(1 + 4x)^2} = \frac{-4x^2 - 2x - 12}{(1 + 4x)^2}$

e)  $y' = (18x - 1) \cdot \cos x - (9x^2 - x) \cdot \sin x$

f)  $y' = \frac{6x - (6x + 2)}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$

d)  $y = \frac{3 - x^2}{1 + 4x}$

e)  $y = (9x^2 - x) \cdot \cos x$

f)  $y = \frac{6x + 2}{x}$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATE TIEMPOS

La escalada

Sabes que la derivada es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Si una función describe la trayectoria que sigues cuando caminas o te mueves, cómo sería la derivada si:

- Subes una montaña.
- Caminas por la playa.
- Bajas la ladera de un monte.
- Escalas la pared de un edificio.
- Escalas por el techo de una enorme piedra.

- a) Si subes a una montaña, la derivada será positiva por ser la pendiente positiva.
- b) Al caminar en la playa no se tiene pendiente, luego la derivada es cero.
- c) Si bajas una ladera, la pendiente será negativa, por lo que la derivada será negativa.
- d) Si escalas la pared de un edificio, no existe tangente, por ser la escalada paralela al eje  $y$ , luego la derivada tenderá a infinito ( $\infty$ ).
- e) Si escalas por el techo de una piedra, la pendiente será nula.